

**ALYSSON RAMOS ARTUSO**

**ANÁLISE MULTIVARIADA E FILTROS DE GRAHAM:  
RECONHECIMENTO DE PADRÕES APLICADO AO MERCADO  
ACIONÁRIO BRASILEIRO**

**Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, do Setor de Ciências Exatas e do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, na Linha de Pesquisa de Métodos Estatísticos Aplicados à Engenharia, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia.**

**Orientador: Prof. Dr. Anselmo Chaves Neto**

**CURITIBA**

**2012**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos aqueles que me acompanharam, me suportaram, me trouxeram inspiração e contribuíram para a superação das dificuldades.

Em especial, à minha namorada, depois noiva e futuramente esposa, Gisele Eberspächer, que tanto me motivou e me ajudou com palavras, gestos, revisões e apresentações de Power Point.

Ao orientador Prof. Anselmo Chaves Neto, pela confiança que sempre demonstrou em mim, pela orientação precisa e objetiva e pelas ideias sempre proveitosas que muito enriqueceram este trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, em especial aos professores Jair Mendes Marques, Ademir Alves Ribeiro e Maria Teresinha Arns Steiner pela sólida e valiosa aprendizagem que me proporcionaram.

À banca que muito contribuiu tanto na fase de qualificação quando na defesa da tese para o aperfeiçoamento e correção desse trabalho.

À secretária do CESEC, Maristela Bandil, pela alegria e presteza constantes, que motivam e acalentam todos os dias os alunos do PPGME.

## RESUMO

O mercado de capitais possui destacada importância no processo de desenvolvimento econômico. Uma de suas discussões são as estratégias de seleção de portfólios face a Hipótese do Mercado Eficiente. No Brasil, apenas recentemente os estudos acadêmicos têm se aprofundado na questão com o uso de refinadas técnicas matemáticas e estatísticas. Com o objetivo de avançar na compreensão do mercado acionário brasileiro foram propostas e analisadas técnicas de identificação de variáveis e reconhecimento de padrões para a construção de portfólios baseadas em Métodos Estatísticos Multivariados e na Teoria da Informação. Partiu-se da base teórica da Análise Fundamentalista pelo modelo de múltiplos e por meio da filtragem passiva, Análise Fatorial, Análise Discriminante, Regressão Logística e Árvores de Decisão baseadas nas entropias de Shannon e Rényi avaliou-se os ativos de empresas não-financeiras negociados na Bolsa de Valores de São Paulo no período de 1999 a 2009, apontando indícios contrários à eficiência do mercado nacional. Os modelos construídos foram avaliados pela abordagem da Lachenbruch e foram realizados estudos empíricos por meio de estudos de carteira de um, dois, três e cinco anos em dados não presentes no conjunto de treinamento, com a rentabilidade aferida através do retorno logarítmico, índice de Sharpe e Alfa de Jensen. Os resultados demonstram sucesso na aplicação de técnicas multivariadas e de reconhecimento de padrões, sendo possível explicar boa parte da variabilidade dos dados a partir dos fatores liquidez, precificação do valor contábil, rentabilidade e grau de endividamento. Todas as estratégias propostas tiveram ao menos um índice de retorno ajustado ao risco significativamente superior ao mercado (tomado como o Ibovespa), com os melhores resultados sendo alcançados pelo modelo de filtragem passiva construído a partir dos filtros de Graham originais, mas com qualificadores elaborados para a realidade brasileira: retorno logarítmico anual de 39,78%, face a 12,37% do Ibovespa, índice de Sharpe de 0,0975, contra 0,0053 do Ibovespa, e alfa de Jensen de 25,81%. Entretanto, a diversificação desse modelo apresentou problemas em períodos de altas mais longas. De forma a contornar o problema, propôs-se o uso de escores fatoriais a partir da Análise Fatorial, sendo essa a segunda melhor estratégia entre as elaboradas, obtendo um retorno logarítmico de 38,05% ao ano, índice de Sharpe de 0,0578 e alfa de Jensen de 26,14%. As técnicas de reconhecimento de padrões também apresentaram resultados satisfatórios, mas não tão contundentes quanto os dos dois modelos citados. Por outro lado, tiveram um índice de acerto na classificação em torno de 80%, com o melhor resultado logrado pela Árvore de Decisão com base na entropia de Shannon: índice de acerto de 87,75%. Essas técnicas também permitiram identificar as variáveis Preço de Mercado, Preço por Valor Contábil e *Dividend Yield* como as que melhor discriminam os ativos de rentabilidade superior a do mercado, apontando as ações de valor como as mais rentáveis no período. Assim, as técnicas empregadas permitiram uma maior compreensão do mercado acionário e indicaram a possibilidade de se identificar sistematicamente ativos subavaliados e de se obter retornos excedentes.

Palavras-chave: seleção de portfólio, hipótese do mercado eficiente, análise multivariada, teoria da informação, filtros de Graham.

## ABSTRACT

The capital market has outstanding importance in the process of economic development. One of his points of discussion is the portfolio selection strategies against the Efficient Market Hypothesis. In Brazil, only recently urged academic studies about that with the use of refined mathematical and statistical techniques. In order to advance the understanding of the Brazilian stock market, models have been suggested and analyzed to identify variables and recognize patterns to construct portfolios based on multivariate statistical methods and information theory. It was started from the theoretical basis of Fundamental Analysis by multiple model and through passive filters, Factor Analysis, Discriminant Analysis, Logistic Regression, and Decision Trees based on Shannon and Rényi entropies evaluated the assets of non-financial stocks of the São Paulo's Stock Market in the period between 1999 and 2009, pointing evidences against the efficiency of the domestic market. The models developed were tested by the Lachenbruch's approach and empirical studies, performed by a portfolio approach with one, two, three and five years of data different of the training set, and measured by the logarithmic return, Sharpe ratio and Jensen's Alpha. The results demonstrate successful application of multivariate techniques and pattern recognition, and can explain much of the data's variability from the factors liquidity, pricing of book value, profitability and indebtedness. All suggested strategies have had at least one index of risk-adjusted return significantly higher than the market (taken as the Ibovespa), with best results being achieved by passive filtering model built from the original filter Graham, but with qualifiers designed to Brazilian's reality: annual logarithmic return of 39.78%, compared with 12.37% of the Bovespa index, Sharpe ratio of 0.0975, 0.0053 against the Ibovespa, and Jensen's alpha of 25.81%. However, the diversification of this model had problems during periods of bull market. In order to by-pass the problem, it was suggested the use of factor scores from factor analysis, the second best strategy developed, obtaining a logarithmic return of 38.05% per year, Sharpe ratio of 0.0578 and Jensen's alpha of 26.14%. The techniques of pattern recognition also showed satisfactory results, but not so strong as those of the two models mentioned. On the other hand, they had a classification success rate around 80% in Lachenbruch's approach, with the best result achieved by the Decision Tree based on Shannon entropy: success rate of 87.75%. These techniques helped to identify the variables Market Price, Price per Book Value and Dividend Yield as those that best discriminate the assets of superior return, showing the value stocks as the most profitable in the period. Thus, the techniques employed allowed a greater understanding of the stock market and indicated the possibility to systematically identify undervalued assets and get excess returns.

Keywords: portfolio selection, efficient market hypothesis, multivariate analysis, information theory, Graham's filters.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Múltiplos e Variáveis Determinantes .....	19
Quadro 2.2 – Matriz Confusão .....	105
Quadro 2.3 – Estimativas anualizadas das diferenças de retorno para carteiras com baixo P/VC .....	110
Quadro 2.4 – Resumo das variáveis explicativas .....	119
Quadro 3.1 – Indicadores e variáveis utilizados.....	127
Quadro 3.2 – Testes de validade da Análise Fatorial .....	131
Quadro 3.3 – Testes $T^2$ de Hotelling .....	133
Quadro 3.4 – Testes $T^2$ de Hotelling para modelo <i>forward stepwise</i> .....	134
Quadro 4.1 – Quantidade de empresas que satisfazem cada Filtro de Graham .....	139
Quadro 4.2 – Empresas que satisfazem pelo menos sete Filtros de Graham a cada ano .....	141
Quadro 4.3 – Retorno logarítmico anual de cada carteira .....	141
Quadro 4.4 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – Filtros de Graham .....	142
Quadro 4.5 – Empresas que satisfazem pelo menos sete critérios com base nos qualificadores modificados .....	144
Quadro 4.6 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – Filtros de Graham com qualificadores modificados.....	145
Quadro 4.7 – Principais variáveis presentes em cada fator .....	148
Quadro 4.8 – Comunalidades .....	152
Quadro 4.9 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – escores brutos da Análise Fatorial .....	154
Quadro 4.10 – Carteiras de maior escore formadas a cada ano.....	156
Quadro 4.11 – Variáveis presentes nas funções discriminantes .....	158
Quadro 4.12 – Média do índice de acerto das funções discriminantes pela abordagem lachenbruch.....	162
Quadro 4.13 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – FDLF .....	163
Quadro 4.14 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – FDLF <i>stepwise</i> .....	164
Quadro 4.15 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – MRLM .....	164
Quadro 4.16 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – MRLM <i>stepwise</i> .....	164
Quadro 4.17 – Quantidade de ativos em carteira – FDLF e MRLM .....	165
Quadro 4.18 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – 12 ativos FDLF <i>stepwise</i> .....	166
Quadro 4.19 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – 12 ativos MRLM <i>stepwise</i> .....	166
Quadro 4.20 – Principais ações selecionadas pelos modelos FDLF e MRLM 12 <i>stepwise</i> ....	167
Quadro 4.21 – Variáveis presentes nas árvores de decisão .....	169
Quadro 4.22 – Média do índice de acerto das árvores de decisão.....	171
Quadro 4.23 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – Rényi.....	172
Quadro 4.24 – Média do Retorno, Índice de Sharpe e Alfa de Jensen para diferentes períodos – Shannon .....	172

Quadro 4.25 – Quantidade de ativos em carteira – Árvores de Decisão.....	173
Quadro 4.26 – Principais ações selecionadas pelos modelos de Árvores de Decisão.....	174
Quadro 4.27 – Média do retorno logarítmico das diversas estratégias.....	176
Quadro 4.28 – Média do índice de sharpe das diversas estratégias.....	176
Quadro 4.29 – Média do alfa de Jensen das diversas estratégias.....	177
Quadro 4.30 – Número de vezes que os principais ativos foram selecionado em cada estratégia .....	179
Quadro 5.1 – Média das medidas de rentabilidade para as carteiras de um ano nas diversas estratégias .....	190
Quadro A4.1 – Autovalores superiores a 1 a cada ano.....	213
Quadros A4.2 – Matriz $\hat{\Lambda}$ – Pesos ( <i>loadings</i> ) das variáveis em cada fator ano a ano.....	215
Quadro A4.3 – Proporção da variância devido a cada fator .....	220
Quadros A4.5 – Rentabilidades da carteira de maior escore.....	225
Quadro A5.1 – Função Discriminante Linear de Fisher com todas as variáveis .....	228
Quadros A5.2 – Matriz confusão da Função Discriminante Linear de Fisher pela abordagem Lachenbruch – todas as variáveis .....	228
Quadro A5.3 – Função Discriminante Linear de Fisher via método <i>forward stepwise</i> .....	230
Quadros A5.4 – Matriz confusão da Função Discriminante Linear de Fisher pela abordagem Lachenbruch – <i>forward stepwise</i> .....	230
Quadros A5.5 – Carteiras formadas pela Função Discriminante Linear de Fisher .....	232
Quadro A5.6 – Modelo de Regressão Logística Múltipla com todas as variáveis.....	236
Quadros A5.7 – Matriz confusão da Modelo de Regressão Logística Múltipla com todas as variáveis pela abordagem Lachenbruch .....	236
Quadro A5.8 – Modelo de Regressão Logística Múltipla via <i>forward stepwise</i> .....	238
Quadros A5.9 – Matriz confusão da Modelo de Regressão Logística Múltipla via <i>forward stepwise</i> pela abordagem Lachenbruch .....	239
Quadro A5.10 – Carteiras formadas pelo Modelo de Regressão Logística Múltipla.....	240
Quadros A5.11 – Rentabilidades das carteiras construídas pelo modelo FDLF 12 <i>forward stepwise</i> .....	246
Quadros A5.12 – Rentabilidades das carteiras construídas pelo modelo MRLM 12 <i>forward stepwise</i> .....	247
Quadros A6.3 – Informação mútua quadrática de Rényi com o grupo Sucesso/Fracasso .....	256
Quadros A6.4 – Informação mútua de Shannon com o grupo Sucesso/Fracasso .....	257
Quadros A6.5 – Matriz confusão via entropia de Rényi .....	257
Quadros A6.6 – Matriz confusão via entropia de Shannon.....	259
Quadro A6.7 – Carteiras formadas via entropia de Rényi.....	261
Quadro A6.8 – Carteiras formadas via entropia de Shannon .....	263
Quadros A6.9 – Rentabilidades das carteiras construídas via entropia de Rényi .....	265
Quadros A6.10 – Rentabilidades das carteiras construídas via entropia de Shannon .....	266
Quadro A7 – Número de vezes que cada ativo foi selecionado em cada estratégia .....	268

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Redução do risco pela diversificação .....	22
Figura 2.2 – Estrutura do Balanço Patrimonial segundo a Lei 6.404/76.....	31
Figura 2.3 – Estrutura da Demonstração de Resultado do Exercício segundo a Lei 6.404/76..	32
Figura 2.4 – Composição dos quatro tipos de classe de ativos .....	44
Figura 2.5 – Matriz de Dados .....	57
Figura 2.6 – Representação Geométrica das Componentes Principais num caso bidimensional .....	64
Figura 2.7 – Representação Gráfica do <i>scree plot</i> .....	66
Figura 2.8 – Representação do método de Fisher para duas populações .....	78
Figura 2.9 – Relação entre entropia, entropia condicional e informação mútua.....	90
Figura 2.10 – Exemplo de árvore de decisão .....	96
Figura 2.11 – Exemplo de escolha de atributos em duas possíveis partições .....	99
Figura A1.1 – Fronteira Eficiente de Markowitz .....	204

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	–	Ativo Circulante
ACL	–	Ativo Circulante Líquido
AI	–	Ativo Intangível
AP	–	Ativo Permanente
APM	–	<i>Arbitrage Pricing Model</i>
ARLP	–	Ativo Realizável a Longo Prazo
AT	–	Ativo Total
BOVESPA	–	Bolsa de Valores de São Paulo
BP	–	Balanço Patrimonial
CAPM	–	<i>Capital Asset Pricing Model</i>
CGL	–	Capital de Giro Líquido
CVM	–	Comissão de Valores Mobiliários
DF	–	Dívida Financeira
DOAR	–	Demonstração das Origens e Aplicações de Recursos
DRE	–	Demonstração de Resultado do Exercício
DY	–	<i>Dividend Yield</i>
CP	–	Composição do Endividamento
ELP	–	Passivo Exigível de Longo Prazo
FDLF	–	Função Discriminante Linear de Fisher
GE	–	Grau de Endividamento
GEM	–	Grau de Endividamento Modificado
HME	–	Hipótese de Mercado Eficiente
IS	–	Índice de Sharpe
LC	–	Liquidez Corrente
LG	–	Liquidez Geral
LGM	–	Liquidez Geral Modificada
LL	–	Lucro Líquido
LS	–	Liquidez Seca
MCL	–	Média do Crescimento dos Lucros por Ação
ML	–	Margem Líquida
MRLM	–	Modelo de Regressão Logística Múltiplo
NALD	–	Número de Anos com Lucros em Declínio de 5% ou mais
P/CGL	–	Preço por Capital de Giro Líquido
P/L	–	Preço por Lucro
P/V	–	Preço por Vendas
P/VC	–	Preço por Valor Contábil
P/VCT	–	Preço por Valor Contábil Tangível
PC	–	Passivo Circulante
PCTRT	–	Participação de Capital de Terceiros
PM	–	Preço de Mercado
RL	–	Receita Líquida
ROA	–	<i>Return on Assets</i>
ROC	–	<i>Return on Capital</i>
ROE	–	<i>Return on Equity</i>
VC	–	Valor Contábil – Patrimônio Líquido
VCT	–	Valor Contábil Tangível



## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
1.1 O PROBLEMA .....	1
1.2 OBJETIVOS.....	6
1.2.1 Objetivo Geral .....	6
1.2.2 Objetivos Específicos .....	6
1.3 JUSTIFICATIVA .....	7
1.4 ESTRUTURA DA TESE .....	10
2 REVISÃO DE LITERATURA .....	12
2.1 RISCO E RETORNO DE AÇÕES.....	12
2.1.1 Fundamentos da Avaliação – O modelo de múltiplos.....	12
2.1.2 Fundamentos Subjacentes aos Múltiplos.....	18
2.1.3 Risco e Modelos de Precificação.....	21
2.1.4 Eficiência do Mercado.....	26
2.1.5 Demonstrações e Medidas Contábeis .....	28
2.1.6 Indicadores de Rentabilidade .....	35
2.1.7 Indicadores de Liquidez e Estrutura do Capital .....	38
2.1.8 Investimento em Valor – Abordagem de Graham.....	44
2.2 ANÁLISE MULTIVARIADA .....	56
2.2.1 Conceitos Básicos.....	56
2.2.2 Estatísticas Descritivas .....	57
2.2.3 Teste de Hipótese $T^2$ de Hotelling.....	60
2.2.4 Análise de Componentes Principais .....	61
2.2.5 Descarte de Pontos atípicos ( <i>outliers</i> ) .....	66
2.2.6 Análise Fatorial .....	67
2.2.7 Reconhecimento de Padrões.....	73
2.2.8 Análise Discriminante – Método de Fisher .....	74
2.2.9 Regressão Logística.....	80
2.3 TEORIA DA INFORMAÇÃO.....	82
2.3.1 Origem da entropia .....	83
2.3.2 Entropia de Shannon e relação com o conceito físico de entropia .....	86
2.3.3 Entropia de Rényi .....	91
2.4 ÁRVORES DE DECISÃO.....	95
2.8 AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO DE CLASSIFICAÇÃO .....	103
2.5 ESTUDOS ANTERIORES SOBRE AÇÕES .....	106
2.5.1 Estudos realizados no exterior.....	108
2.5.2 Estudos realizados no Brasil.....	114
2.5.3 Modelos desenvolvidos .....	120
3 MATERIAL E MÉTODOS.....	125
3.1 CARACTERIZAÇÃO DA POPULAÇÃO E DAS VARIÁVEIS UTILIZADAS .....	125
3.2 ABORDAGEM DE CARTEIRA .....	128
3.3 AVALIAÇÃO DOS FILTROS DE GRAHAM.....	129
3.4 AVALIAÇÃO DA ANÁLISE FATORIAL.....	130
3.5 AVALIAÇÃO DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ANÁLISE DISCRIMINANTE E REGRESSÃO LOGÍSTICA.....	132
3.6 AVALIAÇÃO DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ÁRVORES DE DECISÃO .....	135

3.7 AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA DO MERCADO.....	136
3.7 RECURSOS UTILIZADOS.....	137
4 RESULTADOS E ANÁLISES .....	139
4.1 RESULTADOS DOS FILTROS DE GRAHAM.....	139
4.2 RESULTADOS DA ANÁLISE FATORIAL .....	147
4.3 RESULTADOS DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ANÁLISE DISCRIMINANTE E REGRESSÃO LOGÍSTICA.....	158
4.4 RESULTADOS DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ÁRVORES DE DECISÃO.....	169
4.5 COMPARAÇÃO DE ESTRATÉGIAS E EFICIÊNCIA DO MERCADO .....	175
CONCLUSÃO.....	183
REFERÊNCIAS .....	192
APÊNDICE 1 – DIVERSIFICAÇÃO DE UM PORTFÓLIO .....	201
APÊNDICE 2 – MERCADO EFICIENTE E RETORNO LOGARÍTMICO.....	206
APÊNDICE 3 – ENTROPIA DE RÉNYI E DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ .....	210
APÊNDICE 4 – RESULTADOS DA ANÁLISE FATORIAL.....	213
APÊNDICE 5 – RESULTADOS DA ANÁLISE DISCRIMINANTE E REGRESSÃO LOGÍSTICA.....	228
APÊNDICE 6 – RESULTADOS DA ÁRVORE DE DECISÃO .....	249
APÊNDICE 7 – ATIVOS SELECIONADOS em CADA ESTRATÉGIA.....	268

# INTRODUÇÃO

## 1.1 O PROBLEMA

Com a regulamentação do mercado de capitais e a estabilização inflacionária vê-se crescer rapidamente no Brasil os investimentos em renda variável, em especial, na Bolsa de Valores. A aplicação em ações é comum em países desenvolvidos, notadamente nos EUA e na Inglaterra, mas, com a economia nacional estável, o investimento em ações passou a chamar a atenção do grande público brasileiro. O mesmo ocorre com as pesquisas acadêmicas brasileiras dirigidas ao mercado financeiro, que apenas recentemente se dedicaram consistentemente ao assunto.

Logo, identificar e compreender o que influencia o desempenho das ações tem se tornado um desafio crescente para investidores e pesquisadores. Um destes fatores é a avaliação do valor das empresas, visto que ao se adquirir ações se está comprando parte de uma empresa, ou seja, ainda que indiretamente o investidor conta com a capacidade da companhia em gerar riqueza e com a capacidade do mercado em reconhecê-la como criadora de valor para o acionista.

Essa análise de valor (*valuation*) é o tema de interesse da Análise Fundamentalista, na medida em que busca identificar empresas com bons fundamentos contábeis/financeiros e subavaliadas pelo mercado. Entre as formas de se fazer essa análise chama a atenção a abordagem de um dos criadores do *valuation*, Benjamin Graham. Seus princípios centrais, desenvolvidos na primeira metade do século XX, são de que (GRAHAM, 2007, p. 17):

- Uma ação representa o interesse do proprietário em um negócio real, com um valor intrínseco que independe do preço da ação;
- O mercado é um pêndulo que sempre oscila entre o otimismo insustentável (que torna as ações muito caras) e um pessimismo injustificável (que torna as ações muito baratas);

- O valor futuro de todo investimento é uma função de seu preço presente, quanto mais alto ele for, menor é o retorno.
- Nenhum investidor pode eliminar o risco de errar. Por isso a necessidade do conceito de “margem de segurança” – nunca pagar um preço elevado demais, independentemente de quanto um investimento possa ser atraente.

Na mais recente edição de *O Investidor Inteligente* (GRAHAM, 2007), atualizada e comentada por Jason Zweig, são trazidos exemplos e pesquisas recentes sobre o tema. Neles se observa que o quanto as ideias de Graham, da década de 1970, permanecem relevantes até os dias atuais quando se pensa em estratégias de investimento.

E, ao caracterizar sua análise de valor como uma forma de investimento, Graham se depara com a necessidade de conceituar o que é um investimento: “Uma operação de investimento é aquela que, após análise profunda, promete a segurança do principal e um retorno adequado. As operações que não atendem a essas condições são especulativas” (GRAHAM; DODD, 1951, p. 38). Nessa definição, alguns pontos chamam a atenção. O primeiro é que um investimento implica numa análise exaustiva de uma companhia e da saúde de seus negócios; segundo, o investidor deve deliberadamente proteger-se contra prejuízos sérios; e por fim, deve-se aspirar um rendimento adequado, não extraordinário.

As pesquisas de Graham sobre o mercado norte-americano até meados da década de 1970 apontaram para dez filtros que as empresas devem satisfazer para serem consideradas bons investimentos. Esses filtros se baseiam em múltiplos de lucro, valor contábil, capital de giro, dívidas, distribuição de dividendos e outros.

Segundo os autores, o prazo esperado para se conseguir retorno acima do mercado é de 3 anos, a fim de se neutralizar os efeitos aleatórios de curto/médio prazo do mercado, como períodos de crises repentinas ou de euforia desmedida. Dentro

desse período espera-se que esses excessos sejam corrigidos (GRAHAM; DODD, 1951).

Em essência, a abordagem de Graham é um reconhecimento de padrões de variáveis econômicas, financeiras e de mercado, tendo em vista o retorno promovido pelas ações. Tal abordagem se mostrou válida para o mercado norte-americano de sua época e foi testada com relativo êxito também nas décadas seguintes. Por conseguinte, é preciso num primeiro momento testar sua eficiência no mercado brasileiro, que já possui mais de 15 anos de solidez e transparência e a seguir sugerir aperfeiçoamentos e novos modelos aplicáveis ao cenário nacional, o que pode ser feito por meio de testes de hipótese.

Desenvolvimentos matemáticos-estatísticos oferecem poderosas técnicas de análise que podem ser aplicadas aos mesmos preceitos nos quais se baseia a filtragem passiva de Graham. Assim, pode-se, além de testá-los, utilizar técnicas de reconhecimento de padrões, para buscar indicadores em suas variáveis contábeis que deem conta de classificar as empresas como bons investimentos potenciais ou não. Tanto a identificação de fatores responsáveis pela variabilidade dos dados das empresas quanto regras de classificação que possam vir a separá-las podem contribuir significativamente para a melhor compreensão do funcionamento do mercado.

As técnicas de reconhecimento de padrões são abordadas em três áreas principais: a da estatística, a da programação linear e a das redes neurais. Sem a intenção de descartar as outras possibilidades, aponta-se como muito apropriada as técnicas estatísticas de Análise Multivariada. Isso em razão da quantidade de variáveis e observações e a busca por uma maior compreensão da dinâmica de mercado, aspectos nos quais a Análise Fatorial, a Análise Discriminante via Função Linear de Fisher e a Regressão Logística podem contribuir. As Árvores de Decisão, técnica de mineração de dados, também foram empregadas como alternativa aos métodos anteriores.

A Análise Fatorial é capaz de identificar as principais variáveis explicativas e, dessa forma, reduzir o número de variáveis utilizadas, agrupando-as em fatores. De posse deles é possível buscar interpretações que deem conta de explicar o funcionamento do mercado. Também é possível classificar as empresas através desses fatores, de modo a elaborar uma estratégia de investimento baseada nos múltiplos contábeis.

Com a Análise Discriminante também é possível identificar variáveis e construir regras de classificação para as empresas com rentabilidade passada inferior ou superior ao do mercado e utilizar essas regras para futura classificação dos ativos. O mesmo vale para a Regressão Logística e para as Árvores de Decisão, que podem ser usadas como técnicas de reconhecimento de padrões.

As Árvores de Decisão podem utilizar os conceitos de entropia e informação mútua da Teoria da Informação, pelo modelo clássico de Shannon ou pela generalização de Rényi, constituindo-se como mais uma alternativa para a identificação de variáveis relevantes e classificação de ativos.

Do ponto de vista estatístico, para avaliar a eficiência desses modelos de classificação, há a abordagem de Lachenbruch. Posteriormente, uma análise empírica é capaz de revelar se os modelos desenvolvidos oferecem uma rentabilidade superior ao mercado quando aplicados a dados diferentes dos de treinamento.

O presente trabalho envolve a análise do retorno acionário de empresas utilizando-se de múltiplos de mercado e de índices econômico-financeiros obtidos dos relatórios contábeis. A esses dados foram aplicadas técnicas estatísticas multivariadas com a finalidade de identificar variáveis e selecionar ativos.

Sendo realizado por uma janela de tempo superior a 10 anos, com regras de construção de 1999 a 2009 e testes até 31/03/2011, de forma a desvincular os modelos criados de movimentos de curto prazo tomados pelo mercado. Isso fornece robustez aos resultados alcançados diante de vários cenários econômicos pelos quais o Brasil e

o mundo passaram. O mercado nacional, particularmente, possui elevada volatilidade, fruto de reflexos da economia interna e externa. Nos últimos 12 anos o Brasil sofreu com pelo menos seis crises: o estouro da “Bolha da Nasdaq” em 2000, a crise Argentina e os efeitos mundiais do 11 de setembro, em 2001, o risco político da eleição do presidente Lula em 2002, a crise do *subprime* em 2008 e a crise da dívida pública da Zona do Euro em 2010 e 2011.

A amostra de estudo foi todo o conjunto de empresas não-financeiras de capital aberto listadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). O acesso aos relatórios contábeis se deu através da plataforma Economatica. Para análise e tratamento dos dados, além da planilha eletrônica Excel, foram utilizados os *softwares* MATLAB, Statistica e Minitab.

Para testar as estratégias de investimento foi realizado um estudo de carteira para os períodos de 1, 2, 3 e 5 anos. As medidas de rentabilidade utilizadas foram o retorno logarítmico, o índice de Sharpe e o Alfa de Jensen, tendo como parâmetro o Ibovespa e a taxa Selic.

Dessa forma foi possível analisar a aplicabilidade da estratégia de Graham na Bovespa. Em seguida foram identificados fatores passíveis de explicarem o funcionamento do mercado de capitais e construídos modelos de avaliação em busca de retornos excedentes.

Zweig, ao comentar sobre a estratégia de Graham, chama a atenção para um pecado comum ao se buscar padrões no mercado acionário: ao se analisar um grande volume de dados é comum encontrar diversos padrões nos retornos, ao menos por acaso. Afinal, aleatoriamente, companhias cujas ações possuam rentabilidade acima da média terão muitas coisas em comum. Contudo, segundo as ideias de Graham, “a menos que esses fatores sejam a *causa* do alto desempenho, eles não podem ser usados para prever retornos futuros” (GRAHAM, 2007, p. 65). O fato desse trabalho se ater aos fundamentos econômico-financeiros amplamente aceitos nas análises de

investimento é para se manter fiel aos preceitos do autor. A construção e teste das análises e portfólios ao longo de vários anos também visam diminuir a influência de aspectos aleatórios nos modelos aqui apresentados.

Essa abordagem permitiu ainda apontar indícios sobre a hipótese de mercado eficiente. Segundo essa hipótese, não haveria formas de identificar ações que produzissem consistentemente um retorno acima do retorno de mercado. Ou seja, os erros de precificação existentes nos ativos são aleatórios e a correlação desses desvios com qualquer variável explicativa é nula.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Propor e analisar técnicas baseadas em Métodos Estatísticos Multivariados e na Teoria da Informação para ranquear as empresas de acordo com seus múltiplos e índices econômico-financeiros comuns da Análise Fundamentalista, visando à construção de portfólios com uma rentabilidade acima da de mercado.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- a) Testar a aplicabilidade dos filtros de Graham e, por consequência, dos conceitos que os sustentam, no mercado acionário nacional.
- b) Identificar e interpretar fatores explicativos da maior parte da variabilidade dos dados.
- c) Construir modelos de discriminação das empresas de acordo com sua rentabilidade e testar o poder preditivo desses modelos.
- d) Apontar indícios sobre a eficiência do mercado acionário brasileiro.



### 1.3 JUSTIFICATIVA

O mercado de capitais assume um dos mais relevantes papéis do processo de desenvolvimento econômico. As ações, representativas do capital das empresas, são seu principal ativo negociado. Para ASSAF NETO (2006, p. 160) sua função básica “é a de promover a riqueza nacional por meio da participação da poupança de cada agente econômico”.

A decisão de investir em ações deve ser precedida de uma análise das expectativas dos rendimentos a serem obtidos ao longo do prazo de permanência com a posição acionária. Dessa forma, a principal tarefa do investidor está na avaliação do retorno esperado em conjunto com o risco assumido devido ao capital aplicado.

Ainda de acordo com ASSAF NETO (2006, p. 193): “apesar de o processo de decisão de investimento acionário ser, muitas vezes, desenvolvido de maneira mais intuitiva, é indispensável, para efeito de um posicionamento mais racional de mercado, que a aplicação financeira seja reflexo de uma avaliação formal desses ativos”.

Por esse motivo, esse trabalho apresenta uma forma de avaliação baseada em múltiplos, seguindo as ideias de Graham. Isso em busca de padrões nas demonstrações contábeis das empresas nacionais de capital aberto negociadas na Bovespa. De forma coerente, portanto, com a necessidade de avaliações formais de investimento no mercado acionário.

A escolha de usar as ideias de Graham para servirem de suporte teórico à estratégia de investimento se deve a sua reconhecida importância no estudo do tema e na evidência factual de que investidores adeptos de seus conceitos têm obtido, consistentemente, retornos acima do mercado. Para SMITH (2004, p. 139):

Graham e Dodd [no livro *Security Analysis*] lançaram as bases do que hoje conhecemos por "investimento em valor". Mas o verdadeiro mérito do trabalho de Graham e Dodd foi o de estabelecer um rigoroso método de avaliação dos preços das ações, ultrapassando o simples olhar sobre a taxa de dividendos atual. De certa forma, embora Graham e Dodd tenham desprezado aquilo que eles viram como excessos da Nova Era, a abordagem deles ratificava um dos conceitos fundamentais que serviram

de base para o “boom” da década de 1920 - que os lucros, não os dividendos, conduzem, em última instância, os preços das ações.

Pesquisas posteriores confirmaram a forte relação entre lucros e preços das ações e evidenciaram outras variáveis, também presentes nos filtros de Graham, que possuem conexão com os preços, com destaque especial ao valor patrimonial (FAMA; FRENCH, 1992).

Hoje, entende-se que diversos fatores influenciam os preços das ações, tanto internos, como os relacionados ao desempenho da empresa emissora, quanto externos, relacionados à economia do país e à expectativa dos agentes econômicos. Segundo MELLAGI FILHO e ISHIKAWA (2003, p. 274) “para dar conta dos inumeráveis fatores, é mais do que necessária a compreensão de métodos estatísticos para a avaliação do risco dos investimentos.” Através dos modelos de precificação, que são essencialmente matemáticos e estatísticos, estende-se essa compreensão à medida que a avaliação do retorno só faz sentido se relacionada com o risco envolvido no investimento. Portanto, seja para precificar um ativo ou para estimar um retorno esperado sobre um investimento arriscado, conhecimentos estatísticos são extremamente relevantes.

O uso dos dados contábeis e de índices econômico-financeiros são largamente utilizados em diversas áreas, como Administração, Economia, Ciências Contábeis, Finanças e afins, sendo de reconhecida importância na análise de investimentos, em especial no que diz respeito à escola fundamentalista. Para LIMA (2002, p. 4) “variáveis como Receita Líquida, Ativo Total e Patrimônio Líquido, entre outras, indicam de maneira inequívoca, senão o futuro da empresa, ao menos a tendência a ser seguida”. Dessa forma, o uso desses dados pode contribuir para classificar as ações das companhias em grupos de acordo com a expectativa de suas rentabilidades.

Cabe ressaltar que os dados publicados nos balanços das empresas de capital aberto que negociam suas ações na Bovespa estão disponíveis a todo o público, são

fiscalizados pelos órgãos competentes e auditados por instituições independentes, de modo a minimizar as dúvidas sobre sua veracidade.

Estudos empíricos sobre Análise Fundamentalista são relativamente comuns em países com economia consolidada e mercado de capitais popularizado. Porém sua extensão a outras épocas e a outros mercados não é simples, necessitando testes mais específicos.

No Brasil são poucos os estudos na área e, somente recentemente, a comunidade científica tem voltado sua atenção para esse tema. Porém, é pouco difundida a utilização da Análise Multivariada nesses estudos e, quando fazem uso de métodos estatísticos, o fazem, em geral, superficialmente e tratam as variáveis isoladamente. Pesquisas nacionais que têm como alvo direto os conceitos desenvolvidos por Graham são pouquíssimas, apenas duas além das do próprio autor desta, e nenhuma se propôs a estudar e desenvolver um modelo formal de avaliação adaptado ao mercado local.

Os Métodos Estatísticos Multivariados e a Teoria da Informação configuram-se como poderosas ferramentas de análise, já que concedem meios de identificar variáveis explicativas, classificar observações e testar hipóteses acerca de riscos e retornos de investimentos, podendo também, por consequência, analisar a eficiência do mercado acionário brasileiro.

O reconhecimento de padrões multivariados, em especial com resposta dicotômica, também tem sido de interesse crescente, com o desenvolvimento de diversas metodologias que podem ser aplicadas a diversos campos (STEINER e CARNIERI, 1994). O uso dessa técnica no mercado acionário brasileiro, aliado ao uso de conceitos da Teoria da Informação, ao menos diante de bibliografia pesquisada, trata-se de uma inovação que pode contribuir para o desenvolvimento tanto dos métodos utilizados quanto para a compreensão do funcionamento do mercado de capitais nacional.

## 1.4 ESTRUTURA DA TESE

Essa descrição inicia-se pelos objetivos específicos, particularmente os três primeiros, a fim de atingir posteriormente o objetivo geral.

Em primeiro lugar, é feita a avaliação dos filtros de Graham. A partir dos dados contábeis das empresas negociadas na Bovespa no período de 1999-2009, foram selecionadas as empresas que satisfaziam as suas condições originais. Como alternativa, também foram construídos filtros com base em quartis, visando adequar os seus qualificadores ao mercado brasileiro. Um estudo de carteira pôde esclarecer a viabilidade das duas estratégias.

Os resultados desses procedimentos já forneceram comentários acerca da eficiência do mercado e serviram como base para a aplicação de poderosas ferramentas de análise multivariada a fim de reconhecer padrões no mercado acionário.

A seguir, foi realizada uma Análise Fatorial para as mesmas empresas durante o mesmo período a fim de identificar e interpretar os principais fatores explicativos da variabilidade dos dados. De posse desses fatores, o escore bruto de cada observação foi utilizado para ranquear as ações e construir portfólios. Novamente um estudo de carteira pôde comparar rentabilidades e confrontar a hipótese de mercado eficiente.

Para se aplicar as técnicas de discriminação, foram construídas matrizes de observação com as empresas que tiveram desempenho acima ou abaixo da média de mercado a cada ano. Os modelos de classificação, construídos pelos métodos de Análise Discriminante, Regressão Logística e Árvores de Decisão, permitem, num primeiro momento, identificar as variáveis relevantes que melhor discriminam os ativos. Na sequência, esses modelos foram interpretados e aplicados ao conjunto de dados permitindo, novamente, a construção de portfólios. Novamente, estudos de carteira serviram para avaliar os retornos e comparar os resultados com o predito pela hipótese de mercado eficiente.

O texto desta tese está estruturado da seguinte forma: além da presente introdução, tem-se o capítulo II, que traz a Revisão de Literatura, onde se descreve os fundamentos da avaliação, a Hipótese de Mercado Eficiente, a técnica de investimento em valor, os múltiplos e as medidas de risco e retorno de interesse, os conceitos da estatística multivariada, da teoria da informação e os métodos de reconhecimento de padrões propostos. No capítulo III, denominado Material e Métodos, está caracterizada a amostra e descritas as etapas de aplicação dos modelos propostos. Os resultados e discussões de cada modelo e para cada objetivo descrito, estão presentes no capítulo IV, seguido pela conclusão do trabalho. Nos Apêndices, numerados de um a seis, estão ora demonstrações e aprofundamentos retirados do corpo do texto por questões de fluidez de leitura, ora dos resultados e dados de saída detalhados dos modelos propostos.

## **2 REVISÃO DE LITERATURA**

### **2.1 RISCO E RETORNO DE AÇÕES**

#### **2.1.1 Fundamentos da Avaliação – O modelo de múltiplos**

Os modelos de avaliação objetivam, em sua essência, projetar o comportamento futuro dos ativos financeiros. Uma maneira é através da análise da série histórica de cotações e outras técnicas de análise gráfica. Outra é a precificação, absoluta ou relativa, de um valor intrínseco para a ação, objetivo da Análise Fundamentalista. Neste caso, o estudo se baseia no desempenho econômico e financeiro da empresa e em comparações bursáteis, setoriais e conjunturais, correspondendo ao método de múltiplos da Análise Fundamentalista. Há ainda Análises Econômicas gerais e o campo de Finanças Comportamentais como formas de estudo do comportamento do mercado acionário. A opção pela Análise Fundamentalista em detrimento a outras escolas tradicionais se deve pela possibilidade de interpretação que as variáveis oferecem, ao mesmo tempo em que se pode inferir quais são as variáveis realmente relevantes nesse processo.

A técnica fundamentalista considera a análise de fatores internos e externos a firma, os quais exercem influência sobre seu desempenho e, em consequência, alteram seu valor intrínseco. A principal fonte de informação desse critério de avaliação são os demonstrativos contábeis das companhias e os dados referentes ao setor econômico de atividade, ao mercado acionário e à conjuntura econômica.

De posse desses dados, três são os modelos usuais aplicados com o objetivo de relacionar as decisões de compra ou venda de determinada ação com seu preço de mercado: o método do valor presente dos fluxos de caixa, o método dos múltiplos e a avaliação por meio de opções reais.

A abordagem de Graham se baseia no método de múltiplos, em que

indicadores de análise procuram avaliar os reflexos do desempenho da empresa sobre o valor de mercado de suas ações para apontar se elas estão sub ou sobre-avaliadas em comparação a seus pares. Para tal, são necessários indicadores balizados em termos de lucro, valor contábil ou receitas geradas.

Essa é uma forma de avaliação que contorna diversas dificuldades do método de fluxos descontados, oferecendo explicações simples e até intuitivas para as avaliações. Outra vantagem é que, ao contrário dos métodos de fluxo de caixa descontado e de opções reais, a avaliação por múltiplos não requer inúmeras estimativas iniciais que podem impactar significativamente no resultado final. Porém, inúmeros múltiplos podem ser criados e “essa é uma das grandes críticas feitas sobre o assunto – principalmente quando são criados para propósitos favoráveis próprios” (MELLAGI FILHO; ISHIKAWA, 2003, p. 292)

Baseado na literatura da área (ASSAF NETO, 2006; COPLAND; KOLLER; MURRIN, 2002; DAMODARAN, 2002, 2006a, 2006b; GRAHAM; DODD, 1951, GRAHAM, 2007; MELLAGI FILHO; ISHIKAWA, 2003; PÓVOA, 2007), selecionou-se indicadores de mercado amplamente aceitos que serão analisados neste trabalho:

- a) **Preço de Mercado (PM)** – O valor de mercado de uma firma é representado pela cotação das suas ações em Bolsa multiplicada pelo número total de ações que compõem seu capital. Para o cálculo adequado do valor de mercado, devem ser consideradas as cotações em Bolsa de cada tipo de ação (ordinárias e preferenciais) e ponderadas pelas quantidades de cada tipo no capital da companhia.

$$PM = (\text{Número de Ações Ordinárias} \times \text{Preço das Ações Ordinárias}) + (\text{Número de Ações Preferenciais} \times \text{Preço das Ações Preferenciais}) \quad (2.1)$$

No caso de haver mais de uma classe de ações preferenciais, basta se somar o Preço de Mercado de mais essa classe na expressão acima. Algumas sociedades

anônimas negociam conjuntamente ações ordinárias e preferenciais em forma de *units*, o que também não representa dificuldades para o cálculo do Preço de Mercado. Seu uso, além de fazer parte do cálculo de outros índices, está em diferenciar o tamanho das empresas.

- b) ***Dividend Yield (DY)*** – Também conhecido como taxa de dividendos, indica a remuneração do acionista realizada sobre o valor pago pela ação:

$$DY = \frac{\text{Dividendos Totais}}{\text{Preço de Mercado}} = \frac{\text{Dividendo por Ação}}{\text{Preço por Ação}} \quad (2.2)$$

A princípio, uma empresa com elevado *Dividend Yield* é interessante ao acionista, já que devolve a ele parte do capital investido. Por lei, ao menos 25% dos lucros deverão ser distribuídos em forma de dividendos. Essa porcentagem dos lucros distribuída em forma de dividendos é conhecida por taxa *payout*. Porém são raros os casos em que a totalidade dos lucros é distribuída dessa forma. Uma baixa distribuição de dividendos também não é, necessariamente, ruim para o acionista desde que a companhia, ao reinvestir os lucros, seja capaz de fazê-lo com uma rentabilidade maior do que o acionista conseguiria.

- c) ***Índice Preço/Lucro (P/L)*** – Constitui um dos quocientes mais tradicionais do processo de análise de ações. É calculado pela relação entre o preço da ação e o lucro líquido. Caso não haja lucro o índice P/L não se aplica.

$$P/L = \frac{\text{Preço de Mercado}}{\text{Lucro Líquido}} = \frac{\text{Preço por Ação}}{\text{Lucro por Ação}} \quad (2.3)$$

Teoricamente, o índice P/L indica o número de anos que um investidor tende a recuperar o capital investido. Todavia, como os lucros não costumam ser integralmente distribuídos em forma de dividendos, esse índice não revela, sob o ponto de vista de realização financeira, o número de anos necessários para o investidor recuperar seu capital.



O múltiplo P/L costuma ser estimado com o preço atual da ação dividido pelo lucro por ação do último ano fiscal, resultando num P/L corrente. Mas há quem prefira calcular o lucro utilizando os valores dos quatro últimos trimestres, calculando um P/L passado ou projetando o lucro esperando, de forma a obter um P/L futuro (DAMODARAN, 2006b, p. 12).

O inverso do índice preço/lucro (L/P) indica a lucratividade de uma ação e é frequentemente comparado ao índice de crescimento da economia do país e à taxa livre de risco para avaliar a entidade contábil.

Do ponto de vista do investidor, embora um múltiplo menor seja melhor do que um mais elevado, esse indicador é afetado pela taxa de crescimento e do risco da empresa estudada. Um problema desse índice é que ações consideradas subavaliadas, por apresentarem baixo índice P/L, na verdade podem estar precificadas corretamente. Explicações para isso estão na estagnação de seu crescimento ou no alto risco de seus lucros, quer porque eles sejam muito variáveis ao longo dos anos, quer porque sejam derivados de receitas não-operacionais ou de outros itens não-recorrentes de suas apresentações contábeis.

- d) **Índice Preço/Vendas (P/V)** – Os múltiplos do lucro apresentam diversas variantes. Ao buscar índices mais estáveis e menos suscetíveis a interpretações, um múltiplo que tem sido muito empregado, com os mesmos objetivos do P/L, é o quociente entre o Preço de Mercado e as vendas realizadas pela empresa, entendidos como a receita líquida dos últimos 12 meses:

$$P/V = \frac{\text{Preço de Mercado}}{\text{Receita Líquida}} \quad (2.4)$$

A vantagem desse índice é sua facilidade ao se comparar companhias que atuam em mercados diferentes e que, por isso, podem utilizar diferentes sistemas contábeis.

- e) **Índice Preço/Valor Contábil (P/VC)** – O Valor Contábil do Patrimônio Líquido informa o que os contadores consideram que seja o valor da participação dos acionistas na empresa, sendo o múltiplo um comparativo entre esse valor e o Preço de Mercado. O índice é dado pela equação:

$$P/VC = \frac{\text{Preço de Mercado}}{\text{Patrimônio Líquido}} \quad (2.5)$$

Seu uso é frequente como métrica para avaliar se a ação está sub ou sobre-avaliada. Entretanto, na comparação, é preciso levar em conta a rentabilidade do patrimônio líquido (ROE), já que empresas que possuem maior ROE tendem a ser negociadas num múltiplo P/VC mais elevado.

Porém, o índice P/VC pode ser muito diferente de um segmento econômico para outro, visto que o potencial de crescimento e a qualidade dos ativos podem diferir muito entre os segmentos.

- f) **Índice Preço/Valor Contábil Tangível (P/VCT)** – É uma modificação do múltiplo anterior usado por GRAHAM e DODD (1951). O Valor Contábil Tangível é a subtração do Ativo Intangível do Patrimônio Líquido, sendo calculado da seguinte forma:

$$P/VCT = \frac{\text{Preço de Mercado}}{\text{Valor Contábil Tangível}} \quad (2.6)$$

O objetivo é não levar em consideração no cálculo o valor atribuído aos itens intangíveis, como marcas, patentes, direitos autorais etc, sendo uma medida mais conservadora que a anterior, mas que possui o mesmo viés em relação ao ROE.

Um problema desses quatro últimos índices é não levarem em conta companhias com um grau elevado de alavancagem. Caso o endividamento financeiro seja grande, é perfeitamente possível encontrar firmas com baixos múltiplos de lucro, receita ou valor patrimonial, porém elas podem apresentar sérios riscos de solvência.

g) **Índice Preço/Capital de Giro Líquido (P/CGL)** – Um múltiplo incomum, também inserido por GRAHAM e DODD (1951) e que, portanto, fará parte desse estudo. É uma modificação dos múltiplos P/L, P/V e P/VC, mas que não é tendencioso em relação às dívidas da empresa, pois envolve somente seu Capital de Giro Líquido (CGL). Do ponto de vista dos autores, o CGL é entendido como Ativo Circulante menos Passivo Circulante e Exigível de Longo Prazo.

$$P/CGL = \frac{\text{Preço de Mercado}}{\text{Capital de Giro Líquido}} \quad (2.7)$$

Se esse índice for inferior a 1, significa que a empresa poderia ser adquirida sem que o comprador pagasse nada por todos os ativos permanentes, como prédios, máquinas ou quaisquer itens intangíveis que possam existir. Segundo GRAHAM (2007, p. 197) “muito poucas companhias acabam tendo um valor final inferior ao de seu capital de giro apenas, embora um pequeno número de exemplos dispersos possa ser encontrado”. Contudo, em momentos de crises no mercado, o que se torna “surpreendente é constatar [...] que existiram tantas empresas disponíveis que foram avaliadas pelo mercado nessa base de subvalorização”.

Esses são os sete múltiplos de mercado que serão utilizados em análises posteriores. Outras medidas econômico-financeiras, de risco e rentabilidade, serão apresentadas nos tópicos seguintes.

Quando há novas emissões, desdobramentos, bonificações, distribuições de dividendos ou subscrições de ações, pode ser necessário fazer ajustes nas cotações passadas para se acompanhar a maioria dos índices. Uma forma de contornar esse problema, muito utilizada no passado, foi trabalhar diretamente com o lucro por ação ou valor contábil por ação e o preço da ação para se calcular alguns índices. Com o desenvolvimento da informática os preços passados são facilmente ajustáveis de forma a se usar diretamente o valor de mercado, simplificando os cálculos.

## 2.1.2 Fundamentos Subjacentes aos Múltiplos

É comum o uso do argumento de que a avaliação pelo método de múltiplos requer menos hipóteses do que a avaliação obtida pelo método do valor presente, o que é falso, na opinião de DAMODARAN (2006a, p. 99):

A diferença entre a avaliação pelo método do valor presente e a avaliação pelo método dos múltiplos é que as hipóteses precisam ser explicitadas na primeira e podem permanecer implícitas na segunda. É importante sabermos quais as variáveis que geram os múltiplos e por que estas são as variáveis a controlar ao compararmos esses múltiplos entre duas ou mais empresas.

As hipóteses as quais o autor se refere são estimativas de dividendos pagos, taxas de crescimento, fluxos de caixa, períodos considerados, custo de capital entre outros. Para evidenciar essa dependência no modelo de múltiplos pode ser usado um modelo simples de avaliação do valor presente pelo modelo de desconto de dividendos com crescimento constante, conhecido por modelo de Gordon (ASSAF NETO, 2006, p. 200):

$$\text{Valor Presente} = P_0 = \frac{D_1}{K - g} \quad (2.8)$$

Onde  $D_1$  é o dividendo projetado para o final do primeiro período,  $K$  é a taxa de retorno exigida pelo investidor, entendida como custo do capital próprio, e  $g$  é a taxa de crescimento constante esperada.

Essa equação fornece o *valor justo* para uma ação no caso de empresas que paguem dividendos constantes e cresçam a uma taxa constante. Dividindo-se ambos os lados da equação pelo lucro por ação, obtemos:

$$P/L = \frac{P_0}{LPA_0} = \frac{\text{payout} \times (1 + g)}{K - g} \quad (2.9)$$

O índice P/L está relacionado com a taxa de *payout* paga pela empresa, com o crescimento esperado e com o risco envolvido tanto na estimação desses parâmetros quanto na taxa de desconto  $K$  utilizada. A falta de atenção a essas variáveis pode levar a conclusões equivocadas sobre o preço “barato” ou “caro” de uma ação a partir da

simples comparação de seus múltiplos. DAMODARAN (2006a) sugere o uso de filtros compostos, assim como são os de Graham, para evitar esse problema. Um exemplo do uso de filtros compostos para a seleção de ações com base no múltiplo P/L seria selecionar ações com P/L baixos, crescimento alto e risco beta baixo.

Pode-se usar o mesmo raciocínio anterior para se explicitar variáveis que compõem outros múltiplos de mercado. O quadro a seguir relaciona múltiplos comumente usados com as variáveis que geram cada um deles. A variável mais significativa na visão de Damodaran está destacada em negrito para cada múltiplo.

QUADRO 2.1 – MÚLTIPLOS E VARIÁVEIS DETERMINANTES

Múltiplo	Variáveis Determinantes
Preço/Lucro	<b>Crescimento</b> , Payout, Risco
Preço/Valor Contábil	Crescimento, Payout, Risco, <b>ROE</b>
Preço/Vendas	Crescimento, Payout, Risco, <b>Margem Líquida</b>

Fonte: DAMODARAN (2006a, p. 101)

De posse dessas variáveis determinantes pode-se ampliar a escolha de empresas comparáveis. GRAHAM (2007) separava os setores econômicos em Indústrias, Concessionárias de Serviços Públicos, Ferrovias e Financeiras, dedicando-se à análise dos três primeiros, ainda que seus filtros não façam distinção entre eles.

A seleção de empresas semelhantes pode ser parte fundamental no sucesso de uma análise por múltiplos. Para efeitos de avaliação uma empresa é comparável quando possui fluxos de caixa, potencial de crescimento e risco semelhantes aos da empresa que se está analisando. Implicitamente entende-se que empresas que atuem em um mesmo setor, possuam perfis de fluxo de caixa, crescimento e risco semelhantes e, portanto, podem ser comparadas com muito mais legitimidade. Porém, se forem poucas as companhias atuando em cada setor, a comparação não será significativa, sendo necessário relaxar os critérios restritivos.

Nesse caso é preciso verificar se compensa ou não trabalhar com um conceito mais amplo de segmento econômico para incluir um número maior de empresas comparáveis e, em consequência, trabalhar com empresas mais diversas

entre si. Os estudos de Graham e de seus seguidores mostram que essa pode ser uma alternativa recompensadora.

Há, ainda, a possibilidade de controlar a diferença entre as empresas através da variável determinante mais significativa de um múltiplo. Um exemplo seria, ao invés de comparar diretamente o índice preço/lucro, ajustá-lo para o crescimento, usando o índice PEG: (preço/lucro)/crescimento esperado. Esses índices modificados são então comparados entre as empresas de diferentes setores, desde que as demais variáveis sejam assumidas como iguais.

Quando empresas divergem em relação a mais de uma variável, torna-se difícil o ajuste dos múltiplos para levar em conta essas diferenças. No entanto, é possível regredir os múltiplos contra as variáveis determinantes e obter os valores previstos para cada empresa. Este método é recomendado quando o número de empresas comparáveis é grande e existe uma forte relação entre os múltiplos e as variáveis. DAMODARAN (2002, p. 466) apresenta um modelo de regressão para os três múltiplos mais utilizados com as seguintes variáveis independentes:

$$\begin{aligned} P/L &= f(\text{Crescimento}, \text{Payout}, \text{Risco}) \\ P/VC &= f(\text{Crescimento}, \text{Payout}, \text{Risco}, \text{ROE}) \\ P/V &= f(\text{Crescimento}, \text{Payout}, \text{Risco}, \text{Margem Líquida}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

O autor utiliza o coeficiente beta do modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) como medida de risco, a taxa de crescimento esperado como medida de crescimento e a taxa de distribuição de dividendos – *payout* em seus estudos. No entanto, essas variáveis podem não ser significativas no mercado brasileiro e sua relação pode ser não-linear. Neste caso, pode-se usar transformações destas variáveis para se obter regressões não-lineares. Outra possibilidade é o uso da Análise de Agrupamentos (*Clusters*), em que podem se agrupar empresas de acordo com a similaridade de suas diversas variáveis.

Mas, esses modelos de regressão, a análise de agrupamentos ou o uso de

múltiplos modificados não serão usados diretamente nesse trabalho. Os motivos são três: 1) não faziam parte das ideias originais de Graham; 2) é preciso dar um foco à pesquisa, embora a discussão desses fatos possa contribuir com as conclusões; 3) as medidas de risco, rendimento e crescimento estão presentes no banco de dados levantado para o uso de técnicas multivariadas. Logo, fazem parte, mesmo que indiretamente, dos modelos apresentados.

### 2.1.3 Risco e Modelos de Precificação

Em finanças, o risco refere-se à probabilidade de se obter um retorno diferente do esperado, seja para cima ou para baixo. Por isso a comparação de retornos, isoladamente, não é suficiente para avaliar uma estratégia de investimento, afinal um retorno maior pode ser proveniente de uma exposição maior ao risco. Somente após o ajuste do retorno ao risco é que se deve comparar diferentes carteiras de investimento.

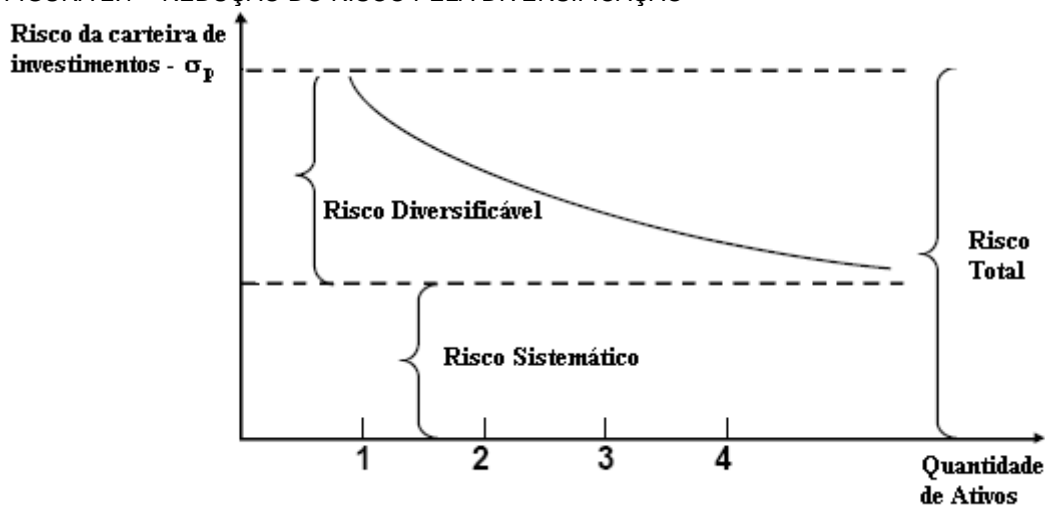
Uma das medidas mais usadas para se mensurar o risco é o desvio padrão (ou a variância), já que corresponde à dispersão dos retornos observados em torno do retorno esperado. Para fazer a estimativa do desvio padrão é comum a análise da série histórica dos retornos do ativo ao longo dos últimos anos.

O risco de um ativo pode ser classificado em duas categorias, o risco sistemático ou conjuntural e o risco não-sistemático ou específico. A primeira está presente em todos os ativos negociados no mercado, sendo determinado por eventos políticos, econômicos e sociais. É o risco de mercado, não-diversificável, não existindo maneiras de evitá-lo totalmente. A segunda é inerente às características do próprio ativo, “diversificável”, não se espalhando para outros títulos da carteira. Uma maneira de neutralizá-lo é selecionando ativos que não tenham correlação positiva perfeita entre si e que, portanto, são atingidos de maneira diferente a cada mudança do mercado (ASSAF NETO, 2006; MELLAGI FILHO; ISHIKAWA, 2003).

Essa ideia de diversificação de ativos com o objetivo de reduzir os riscos de uma carteira passa a ser um instrumento essencial na moderna teoria dos portfólios de Markowitz (1952, 1991). Seu funcionamento consiste no uso da estatística para compor portfólios que apresentem o mínimo de risco possível. No Apêndice 1, esses conceitos são modelados matematicamente.

Graficamente, o conceito de diversificação pode ser representado pela Figura 2.1, que relaciona o risco (medido pelo desvio-padrão) e a quantidade de ativos da carteira.

FIGURA 2.1 – REDUÇÃO DO RISCO PELA DIVERSIFICAÇÃO



O risco diminuiu conforme a diversificação aumenta. Por outro lado, essa redução perde magnitude quando o número de ativos cresce muito. Além disso, os custos de transação aumentam conforme mais ativos são adquiridos, diminuindo a rentabilidade de forma a anular os benefícios da diversificação. Estudos do mercado brasileiro (CERETTA e COSTA JR, 2000; ASSAF NETO, 2006; OLIVEIRA e PAULA, 2008) têm indicado a quantidade ótima de ativos para o investidor médio entre 10 e 12.

Uma das maneiras mais simples de medir o quanto o risco de uma ação (ou carteira) é específico é verificar o quanto da variação do preço da ação é explicada pela variação dos preços do mercado como um todo, considerado como tendo apenas



risco sistemático. O coeficiente de determinação,  $R^2$ , que corresponde ao quadrado da correlação entre o ativo e o mercado, pode variar de 0 a 1 (ou seja, de 0 a 100%) e mede o quanto a variação do mercado explica a variação do preço de um ativo. Um ativo cujo  $R^2$  seja igual a 0 não é afetado pelo mercado, nesse caso 100% do seu risco é específico. Um ativo cujo  $R^2$  seja igual a 1 varia exatamente como o mercado, possuindo apenas risco sistemático.

Os modelos de risco e retorno atualmente usados em finanças, embora possam divergir quanto à medição do risco sistemático (não-diversificável) partem das premissas de que o risco provém da dispersão dos retornos observados e que ele deve ser medido a partir de uma carteira diversificada.

O modelo de risco e retorno mais usado é o CAPM que mede a exposição ao risco de mercado por um beta ( $\beta$ ), identificado como o coeficiente angular de uma regressão linear dos retornos do ativo em relação aos retornos da carteira diversificada de mercado. Admite-se que essa carteira, por conter unicamente risco sistemático (o risco não-sistemático foi todo eliminado pela diversificação), apresenta um coeficiente  $\beta$  igual a 1.

Para calcular o  $\beta$  de uma ação por regressão linear simples são necessários os dados da rentabilidade histórica da ação e do mercado (Ibovespa). Assumindo-se que a série de dados é contínua, o retorno da ação é calculado a partir dos logaritmos neperianos dos preços das ações (MELLAGI FILHO; ISHIKAWA, 2003, p. 276):

$$r_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (2.11)$$

Onde:  $r_t$  é o retorno da ação até o momento  $t$

$P_t$  é o preço da ação no momento  $t$

$P_{t-1}$  é o preço da ação num momento anterior a  $t$

O objetivo dessa transformação de cálculo para os retornos é satisfazer as hipóteses de gaussianidade dos dados e de homogeneidade da variância dos dados necessária para posteriores testes estatísticos paramétricos. Essa transformação

normalizante é conhecida na literatura de Finanças e a premissa de que os retornos logarítmicos possuem distribuição normal e os preços possuem distribuição lognormal ao final de qualquer intervalo finito de tempo é frequentemente assumida. Dessa forma o coeficiente beta é calculado por:

$$\beta_t = \frac{\text{COV}_t(r_{\text{ativo}}, r_{\text{ibovespa}})}{\text{VAR}_t(r_{\text{ibovespa}})} \quad (2.12)$$

Onde:  $\text{COV}_t(r_{\text{ativo}}, r_{\text{ibovespa}})$  é a covariância não-condicional até o instante t.

$\text{VAR}_t(r_{\text{ibovespa}})$  é a variância (desvio padrão ao quadrado) condicional até o instante t.

Todavia, há uma série de hipóteses consideradas pelo modelo CAPM para mensurar o risco e o retorno. As principais são: há uma carteira de mercado que contém somente risco sistemático; não há quaisquer custos de transação; todos os ativos são negociados; existem ativos livres de risco com retornos esperados conhecidos; é possível emprestar e tomar recursos a essa taxa livre de risco; todos os investidores tenham acesso às mesmas informações (SHARPE, 1964; LITNER, 1965).

Para contornar essas premissas restritivas, outros modelos foram desenvolvidos como o APM (*Arbitrage Pricing Model*), os modelos multifatoriais ou os modelos baseados em múltiplos, todos em busca de referenciais de desempenho. Porém, por questões de simplicidade e de foco da pesquisa, somente o coeficiente beta do modelo CAPM é usado como medida de risco.

Portanto, para testar uma estratégia de investimento não basta comparar o retorno observado com o retorno do mercado, visto que exposições diferentes ao risco podem distorcer as conclusões. Alguns índices de comparação de risco e retorno, baseados no modelo de média-variância desenvolvido por Markowitz (1952) e na regressão advinda do CAPM, são de interesse dessa pesquisa:

- a) **Índice de Sharpe** – Trata-se de uma pequena modificação de uma medida de dispersão estatística, o coeficiente de variação. Desenvolvido

por SHARPE (1965), inicialmente para medir o desempenho dos fundos de investimento, avalia o resultado de cada unidade de risco assumido dividindo o excesso de retorno obtido pelo seu desvio-padrão, medido por:

$$IS_i = \frac{E(r_i) - r_f}{\sigma_i} \quad (2.13)$$

Onde:  $IS_i$  é o índice de Sharpe da carteira de investimento  $i$   
 $E(r_i)$  é o retorno médio da carteira de investimento  
 $r_f$  é o retorno livre de risco  
 $\sigma_i$  é o desvio padrão dos retornos da carteira de investimento

b) **Alfa de Jensen** – É uma forma de utilizar o CAPM para avaliar o desempenho de uma estratégia. Consiste em comparar o retorno observado de um investimento com o retorno que esse investimento deveria ter realizado ao longo do período de avaliação, dado o seu beta e o comportamento do mercado ao longo do período (JENSEN, 1969). O alfa de Jensen, abaixo explicitado, é também chamado de Retornos Excedentes ou Retornos Anormais.

$$\alpha_i = E(r_i) - [r_f + \beta_i (r_m - r_f)] \quad (2.14)$$

Onde:  $\alpha_i$  é a medida de performance de Jensen  
 $E(r_i)$  é o retorno médio do investimento  
 $r_f$  é o retorno livre de risco  
 $\beta_i$  é o coeficiente beta estimado para o investimento  $i$   
 $r_m$  é o retorno médio do mercado

Além da comparação entre o retorno obtido pela estratégia de investimento e o Ibovespa, o uso de mais esses dois medidores busca avaliar o sucesso de uma estratégia de investimento em oferecer rendimentos acima do mercado quando ajustados para o risco, seja ele medido em termos do desvio padrão (índice de Sharpe)

ou de coeficientes de regressão (alfa de Jensen).

#### 2.1.4 Eficiência do Mercado

A Hipótese de Mercado Eficiente (HME) está associada à ideia de que as séries de variações de preços dos ativos negociados no mercado de capitais comportam-se de maneira aleatória, não sendo possível discernir qualquer tendência nessas séries que permita a um investidor obter um retorno, ajustado para o risco, melhor que o do mercado.

As primeiras ideias sobre a eficiência dos mercados remetem à tese de Louis Bachelier, *Théorie de la Especulation*, em que ele modela preços como um movimento browniano. Nessa modelagem, eventos passados já estão refletidos nos preços, não havendo variáveis observáveis que expliquem a flutuação dos preços<sup>1</sup>.

Em 1955, Samuelson ajudou a fundar a teoria moderna de precificação, ao descrever o logaritmo dos preços como um movimento Browniano<sup>2</sup>. Contudo, foi FAMA (1970) um dos primeiros a formalizar o conceito de mercado eficiente como o mercado em que os preços refletem totalmente as informações disponíveis.

Dessa maneira, todas as provas realizadas para verificar tal eficiência tentaram, de algum modo, detectar se determinados níveis de informações estavam refletidos nos ativos transacionados no mercado.

Durante as décadas de 1960 e 1970, grande parte das publicações na área das finanças tentou comprovar a hipótese de eficiência informacional do mercado, com quase todas favorecendo a HME. Porém, nas décadas seguintes essa situação se inverteu devido, principalmente à evolução da informática, ao uso de bancos de dados maiores e mais confiáveis e às técnicas estatísticas cada vez mais sofisticadas (COSTA JR; COSTA, 2000). Tais indícios de ineficiência são ainda mais fortes nos mercados

---

<sup>1</sup> No Apêndice 2 está exposta uma modelagem matemática do mercado eficiente, bem como outras considerações.

<sup>2</sup> O desenvolvimento matemático desse modelo também está presente no Apêndice 2.

em desenvolvimento como o brasileiro (COSTA JR, LEAL e LEMGRUBER, 2000; LIMA, 2003; FORTI, PEIXOTO e SANTIAGO, 2009).

FAMA (1970, 1991) definiu as seguintes hipóteses como condições iniciais para um mercado eficiente: 1) não existência de custos de transação; 2) todas as informações estão disponíveis a todos os investidores a custo zero; 3) todos os investidores concordam sobre as implicações das informações atuais nos preços atuais e na distribuição dos preços futuros, ou seja, os investidores possuem expectativas homogêneas.

Baseado nessas hipóteses, um mercado é considerado eficiente se a posse de um conjunto de informações  $I_t$ , sobre o mesmo não altera o retorno esperado ao investir no mercado. Ou seja,  $E(R_{i, t+1}|I_t) = E(R_{i, t+1})$ , onde  $E(R_{i, t+1}|I_t)$  é o retorno esperado do ativo  $i$  no período  $t+1$ , condicionado ao conjunto de informações  $I_t$  disponível no período  $t$ , e  $E(R_{i, t+1})$  é o retorno esperado não condicionado desse ativo. Em outras palavras, o preço dos ativos em qualquer momento é uma estimativa não viesada de toda a informação disponível.

FAMA (1970) caracterizou o conjunto  $I_t$  de três formas diferentes:

- a) Quando  $I_t$  é composto por todas as informações de preços passados, há o mercado eficiente em sua forma fraca;
- b) Quando  $I_t$  é composto por todas as informações públicas (receitas, balanços etc), há o mercado eficiente em sua forma semiforte;
- c) Quando  $I_t$  é composto por todas as informações públicas e privadas (informações privilegiadas), há o mercado eficiente em sua forma forte.

Observa-se que em nenhum dos três níveis o investidor consegue ganhar consistentemente do mercado. O que diferencia os três níveis de eficiência propostos por Fama é, portanto, a natureza das informações refletidas no preço. E mais, “em um mercado eficiente, os retornos esperados de qualquer investimento serão consistentes

com o risco daquele investimento no longo prazo, embora possa haver desvios destes retornos esperados no curto prazo” (DAMODARAN, 2002, p. 156).

Essa definição traz consigo três importantes conceitos implícitos. O primeiro é que um mercado eficiente não implica que o preço de um ativo corresponde ao seu valor verdadeiro durante todos os momentos. Implica apenas que os erros de precificação são estocásticos. Segundo, por serem estocásticos os desvios do preço em relação ao seu valor justo e obedecerem a uma distribuição simétrica, a probabilidade de um ativo estar subvalorizado é, em qualquer tempo, igual à de que esteja supervalorizado e, ainda, que estes desvios não estão correlacionados com qualquer variável observável, por serem independentes. Por fim, se os desvios do preço são aleatórios, então nenhum grupo de investidores é capaz de, por meio de qualquer estratégia de investimento, identificar consistentemente ações sub ou supervalorizadas.

No entanto, seria perfeitamente possível que muitos investidores conseguissem ganhar do mercado no longo prazo. Mas esse desempenho deveria ser creditado à aleatoriedade, não a suas estratégias de investimento. No entanto, a hipótese de mercado eficiente não seria consistente se um grande número de investidores utilizasse a mesma escola de análise e alcançassem retornos superiores aos do mercado. Segundo DAMODARAN (2006a, p. 147), “uma das mais antigas evidências contra a eficiência do mercado reside nas estatísticas de desempenho de muitos investidores que aprenderam suas lições de Ben Graham nos anos 50. Nenhuma estatística de probabilidade poderia explicar a consistência e a superioridade de seus registros”.

### 2.1.5 Demonstrações e Medidas Contábeis

Baseado em referências nacionais (ASSAF NETO, 2002; FÁVERO *et al*, 1995; MARION, 2005; MATARAZZO, 2003; NÓBREGA, 2002; REIS, 2003; SILVA, 2001), explora-se neste trabalho alguns pontos das demonstrações contábeis.

Existem três relatórios que resumem as informações financeiras e patrimoniais de uma empresa que se prestam a análises contábeis: o Balanço Patrimonial (BP), que resume os ativos e os passivos da sociedade anônima; a Demonstração de Resultado do Exercício (DRE), que oferece informações sobre as receitas, as despesas e o resultado obtido no exercício (trimestral ou anual); e a Demonstração das Origens e Aplicações de Recursos (DOAR), também conhecida por Demonstração de Fluxo de Caixa, que especifica as fontes e os usos do caixa durante o exercício fiscal. Nesse projeto, por conter informações mais específicas, o DOAR não é de interesse.

Segundo REIS (2003), as demonstrações contábeis consistem num conjunto de demonstrativos previstos em lei, elaborados no encerramento do exercício social. Somente pelo entendimento da estrutura contábil das demonstrações é que se pode desenvolver avaliações mais detalhadas das empresas. Mais especificamente, todo processo de análise requer conhecimentos sólidos da forma de contabilização e apuração das demonstrações, sem os quais ficam seriamente limitadas as conclusões extraídas sobre o desempenho da companhia.

Para ASSAF NETO (2002, p. 48), a análise de balanços “visa relatar, com base nas informações contábeis fornecidas pelas empresas, a posição econômico-financeira atual, as causas que determinam a evolução apresentada e as tendências futuras”. A intenção é extrair informações sobre a posição passada, presente e projetar uma posição futura.

A análise dos demonstrativos contábeis permite a detecção de problemas na empresa e mostra o seu desempenho diante do mercado. Por isso cabe discutir, sucintamente, a estrutura do Balanço Patrimonial e Demonstração de Resultado do Exercício.

No Balanço Patrimonial são apresentados os Ativos, Passivos e o Patrimônio Líquido da empresa. Os Ativos são divididos em Ativo Circulante, que são os ativos de curto prazo da empresa, incluindo estoques, contas a receber, investimentos

financeiros líquidos e caixa disponível; Realizável a Longo Prazo, que possui a mesma natureza do Ativo Circulante, porém só registra contas que serão realizáveis após o período de fechamento do balanço atual; Permanente, que inclui os ativos de longa duração, como máquinas, equipamentos, terrenos e prédios; e os Ativos Intangíveis, que incluem as marcas e as patentes que presumivelmente gerarão lucros e fluxos de caixa futuros. Os princípios contábeis geralmente aceitos exigem que os ativos imobilizados sejam contabilizados pelo custo histórico, o que frequentemente subestima o valor do ativo. Esses ativos também são muito influenciados pelo prazo e pelo método de depreciação utilizado. É frequente, especialmente em grandes empresas, que parte dos investimentos estejam em empresas controladas, nesses casos os balanços consolidados reúnem os ativos e passivos de ambas, dando uma visão geral da situação da controladora. Por isso, os relatórios contábeis utilizados nesse trabalho foram sempre os consolidados.

Os Passivos são divididos em Passivo Circulante, que inclui todas as obrigações da empresa que vençam no próximo exercício, e Exigível de Longo Prazo, englobando empréstimos de longo prazo e outras obrigações assumidas. O Patrimônio Líquido registra os aportes de capital feitos pelos acionistas e os prejuízos e os lucros não distribuídos, sendo entendido como o valor contábil da empresa. A estrutura do balanço patrimonial é apresentada na Figura 2.2, a seguir.



FIGURA 2.2 – ESTRUTURA DO BALANÇO PATRIMONIAL SEGUNDO A LEI 6.404/76

<b>Ativo</b>	<b>Passivo</b>
Circulante	Circulante
Realizável a Longo Prazo	Exigível a Longo Prazo
Permanente	Resultados de Exercícios Futuros
Investimentos	<b>Patrimônio Líquido</b>
Imobilizado	Capital Social
Diferido	Reservas de Capital
	Reservas de Reavaliação
	Reservas de Lucros
	Lucros ou Prejuízos Acumulados

Já a Demonstração de Resultado do Exercício informa sobre as atividades operacionais da empresa ao longo de um ano fiscal, servindo para mensurar o resultado (lucro ou prejuízo) gerado pelos ativos da empresa. Portanto, é uma demonstração que evidencia os aumentos e as reduções causadas no patrimônio líquido pelas operações da empresa.

A DRE caracteriza-se, então, como sendo uma apresentação em forma resumida das operações da empresa, durante um exercício social, onde mostra a sua situação econômica. É uma demonstração estruturada do geral para o específico, tomando como ponto de partida a receita operacional bruta e a partir daí as deduções de todos os sacrifícios para obter as receitas, consequentemente chega-se ao resultado do exercício. A estrutura do DRE está sintetizada na figura 2.3.

FIGURA 2.3 – ESTRUTURA DA DEMONSTRAÇÃO DE RESULTADO DO EXERCÍCIO SEGUNDO A LEI 6.404/76

	<b>RECEITA BRUTA</b>
(-)	Deduções da receita bruta
	Devoluções e abatimentos
	Impostos s/ vendas
=	<b>RECEITA OPERACIONAL LÍQUIDA</b>
(-)	Custo das mercadorias vendidas
=	<b>LUCRO BRUTO</b>
(-)	<b>DESPESAS OPERACIONAIS</b>
	Despesas com vendas
	Despesas gerais e administrativas
	Despesas financeiras + receitas financeiras
(+/-)	<b>OUTRAS RECEITAS/DESPESAS OPERACIONAIS</b>
=	<b>RESULTADO OPERACIONAL LÍQUIDO</b>
(+/-)	<b>RECEITAS/DESPESAS NÃO OPERACIONAIS</b>
(+)	Receitas não operacionais
(-)	Despesas não operacionais
=	<b>RESULTADO DO EXERCÍCIO ANTES DA C.S. E I.R.</b>
(-)	Provisão para Contribuição Social
(-)	Provisão para Imposto de Renda
=	<b>RESULTADO DO EXERCÍCIO ANTES DAS PARTICIPAÇÕES</b>
(-)	Participações
=	<b>RESULTADO LÍQUIDO DO EXERCÍCIO</b>

De posse desses relatórios contábeis, é possível tomar conhecimento de diversos aspectos de uma empresa, visando uma avaliação econômico-financeira da mesma. As técnicas de análise de balanços são as principais ferramentas para essa avaliação, sendo três as ferramentas mais comuns: Análise Horizontal, Análise Vertical e Indicadores econômico-financeiros. Nesse estudo se propõe o uso de indicadores econômicos (de rentabilidade) e financeiros (de liquidez e estrutura do capital) amplamente relatados pela literatura da área.

Alguns desses indicadores fazem parte das definições dos filtros de Graham e de outros múltiplos, sendo usados como indicadores da saúde financeira e o do desempenho da empresa nesse projeto de pesquisa. Porém para utilizá-los é necessária a tabulação de algumas medidas contábeis. São elas:

- a) **Ativo Total (AT)** – Configura todos os bens e direitos da empresa. Corresponde ao campo 1 do balanço patrimonial padronizado disponível na Comissão Valores Mobiliários (CVM).

- b) **Ativo Circulante (AC)** – Representa os recursos financeiros que se encontram em disposição. Corresponde ao campo 1.01 do balanço patrimonial padronizado disponível na CVM.
- c) **Ativo Circulante Líquido (ACL)** – Apesar de várias definições encontradas (NÓBREGA, 2002), o ativo circulante líquido é entendido como  $ACL = \text{Ativo Circulante (1.01)} - \text{Estoques (1.01.03)}$ . As medidas estão em campos fixos presentes nos BP da CVM, indicados entre parênteses na fórmula anterior. Sua intenção é mensurar realmente o capital instantaneamente disponível pela empresa.
- d) **Ativo Realizável a Longo Prazo (ARLP)** – É qualquer conjunto de bens e direitos que irão realizar-se após 360 dias da data da publicação do balanço a que faz parte. São exemplos receitas de longo prazo a receber ou impostos a recuperar no próximo exercício. Campo 1.02.01 do BP.
- e) **Ativo Permanente (AP)** – No Ativo Permanente, como o próprio nome sugere, estão todas as aplicações de recursos feitas pela empresa de forma permanente (fixa). São representadas pelos bens adquiridos para uso próprio, aplicações de recursos na compra de ações ou quotas de outras empresas de caráter permanente, aplicação de recursos em despesas que devam onerar o resultado de vários exercícios e assim por diante. É dado pelo campo 1.02.02 do BP.
- f) **Ativo Intangível (AI)** – São aqueles que não têm existência física, como marcas, patentes e direitos autorais. Legalmente não precisa ser discriminado no balanço patrimonial, sendo considerado como Ativo Diferido. Porém, nas demonstrações financeiras padronizadas apresentadas à CVM é feita essa discriminação: Ativo Intangível – campo 1.02.02.03 e Ativo Diferido – campo 1.02.02.04.
- g) **Passivo Circulante (PC)** – São as obrigações e encargos que serão

cumpridos até o final do fechamento do balanço patrimonial atual. Corresponde ao campo 2.01.

- h) **Passivo Exigível de Longo Prazo (ELP)** – Trata-se das obrigações com terceiros, como duplicatas a pagar, notas promissórias a pagar, fornecedores, impostos a recolher, contas e títulos a vencer, contribuições a recolher e outras, que terão seu vencimento 360 dias após a data da publicação do balanço de que fazem parte. Campo 2.02 do BP.
- i) **Capital de Giro Líquido (CGL)** – É um conceito incomum no mercado brasileiro, apesar de ser encontrado com outras definições (NÓBREGA, 2002). Usado para os critérios dos filtros de Graham, se refere à diferença entre o Ativo Circulante e as Dívidas Totais, que são a soma do Passivo Circulante e o Exigível a Longo Prazo:  $CGL = AC (1.01) - PC (2.01) - ELP (2.02)$ . Corresponde ao capital de giro que não está comprometido com nenhuma conta do passivo.
- j) **Dívida Financeira (DF)** – Pode ser entendida como dívida financeira somente a parte onerosa do passivo, ou seja, a soma dos empréstimos e financiamentos de curto e de longo prazo e as debêntures de curto e longo prazo emitidas. Usando-se o código dos campos fixos a fórmula para o cálculo das Dívidas é:  $dívidas = \text{empréstimos e financiamentos de curto prazo (2.01.01)} + \text{debêntures de curto prazo (2.01.02)} + \text{empréstimos e financiamentos de longo prazo (2.02.01)} + \text{debêntures de longo prazo (2.02.02)}$ .
- h) **Patrimônio Líquido (VC)** – São os recursos próprios da empresa, subtraído os valores do ativo. O valor patrimonial corresponde ao ativo menos o passivo, representando o valor contábil do patrimônio da empresa. Dado pelo campo 2.04.
- i) **Valor Contábil Tangível (VCT)** – Medida necessária para índices

presentes nos Filtros de Graham que corresponde ao Patrimônio Líquido subtraindo o Ativo Intangível:  $VCT = VC (2.04) - AI (1.02.02.03)$ . Serve como medida dos recursos próprios da empresa sem levar em consideração o “poder da marca” e outros itens intangíveis.

- j) **Receita Líquida (RL)** – Corresponde à Receita Bruta deduzidos os custos de venda. É o campo 3.03 da DRE.
- h) **Lucro Líquido (LL)** – É a soma do lucro operacional, proveniente da venda dos produtos e/ou serviços da empresa, dos resultados não-operacionais e das participações. Dado pelo campo 3.15.

Essas catorze medidas contábeis não são utilizadas diretamente, mas estão presentes nos cálculos de diversos múltiplos e indicadores de rentabilidade e risco utilizados posteriormente. Tais indicadores foram selecionados dentro das pesquisas na área por serem, ao mesmo tempo, relevantes na explicação da rentabilidade e liquidez da empresa e simples em seus cálculos, com todos os dados necessários presentes em campos fixos dos relatórios contábeis.

#### 2.1.6 Indicadores de Rentabilidade

Embora o DRE permita conhecer o lucro contábil de uma empresa em termos absolutos, é importante avaliá-lo em termos relativos ou retornos percentuais. No primeiro caso, avalia-se a rentabilidade em relação ao capital investido e obtém-se a taxa de retorno sobre o investimento. Isto pode ser feito do ponto de vista dos acionistas (ROE), considerando-se a empresa como um todo (ROA) ou em relação a todo o capital investido (ROC). No segundo caso, avalia-se a rentabilidade em relação às vendas por meio da margem de lucro (Margem Líquida). Em todos os casos os índices são quanto maiores, melhores.

- a) **Retorno sobre o Patrimônio Líquido (ROE – *Return on Equity*)** –

Mede a rentabilidade sobre os recursos líquidos da empresa. Segundo ASSAF NETO (2002, p. 285) “o retorno sobre o Patrimônio Líquido fornece o ganho percentual aos proprietários como uma consequência das margens de lucro, da eficiência operacional, da alavancagem e do planejamento eficiente de seus negócios”. A forma adotada para o seu cálculo é:

$$ROE = \frac{\text{Lucro Líquido}}{\text{Patrimônio Líquido}} \quad (2.15)$$

Nessa fórmula usa-se somente o capital próprio da empresa, entendido como o patrimônio líquido. Portanto, é uma medida de quanto cada real de capital próprio proporciona de lucro para os acionistas. Entretanto, pode ser influenciado por partes do lucro que não provém diretamente das atividades principais da empresa, podendo refletir momentos incomuns de elevadas receitas ou despesas não-operacionais.

b) **Retorno sobre Ativos (ROA– *Return on Assets*)** – É uma medida que quantifica o resultado líquido em relação ao Ativo Total. Para MATARAZZO (2003, p.185), este quociente representa “uma medida da capacidade da empresa em gerar lucro líquido e assim poder capitalizar-se. É ainda uma medida do desempenho comparativo da empresa ano a ano”. Um ROA superior ao custo das dívidas indica que a empresa possui uma alavancagem financeira positiva. Ou seja, a rentabilidade de seus negócios é superior à remuneração que paga aos terceiros que lhe fornecem capital. É estabelecida por meio da equação:

$$ROA = \frac{\text{Lucro Líquido}}{\text{Ativo Total}} \quad (2.16)$$

Sua diferença é considerar todo o patrimônio da empresa, compreendido como Ativo Total, mesmo que façam parte desse patrimônio o capital imobilizado (como construções, terrenos etc), intangível (como o valor de marcas e patentes) e outros investimentos (participações minoritárias em outras empresas ou gastos com

pesquisa).

- c) **Retorno sobre o Capital (ROC– *Return on Capital*)** – Relaciona o lucro líquido ao capital investido na empresa. Neste caso “capital” refere-se à soma do valor contábil do endividamento oneroso mais o valor contábil do Patrimônio Líquido. É calculado pela seguinte fórmula:

$$ROC = \frac{\text{Lucro Líquido}}{\text{Dívida Financeira} + \text{Patrimônio Líquido}} \quad (2.17)$$

A vantagem desse indicador é considerar as formas de financiamento que a empresa tomou para gerar seus fluxos de caixa, por isso soma-se a dívida onerosa ao capital próprio da empresa. Desse modo, evitam-se distorções de rentabilidade para o caso de firmas altamente alavancadas.

- d) **Margem Líquida (ML)** – Esta razão revela a margem de lucratividade obtida pela empresa em função de seu faturamento, isto é, quanto a empresa obteve de lucro líquido para cada real vendido. Calculada da seguinte maneira:

$$ML = \frac{\text{Lucro Líquido}}{\text{Receita Líquida}} \quad (2.18)$$

É o indicador mais usado para medir a rentabilidade de uma sociedade anônima, pois relaciona o lucro atingido com as receitas obtidas diretamente das atividades principais da empresa.

Além desses quatro indicadores econômicos, GRAHAM e DODD (1951) usam mais dois em seus filtros, relacionados com o histórico da empresa:

- e) **Média do Crescimento dos Lucros por Ação (MCL)** – Com a intenção de identificar empresas com crescimento estável e em um bom nível em comparação com o restante da economia, calcula-se a média aritmética do crescimento dos lucros por ação (LPA) nos últimos 10 anos:

$$MCL = \frac{\sum_{t=1}^{10} \frac{LPA_t}{LPA_{t-1}}}{10} - 1 \quad (2.19)$$

Quando ocorrer da empresa não possuir histórico de 10 anos para a análise, foi considerado o maior tempo possível para o cálculo da média.

**f) Número de Anos com Lucros em Declínio de 5% ou mais (NALD) –**

Computa, nos últimos dez anos, em quantos anos os lucros decresceram 5% ou mais em relação ao ano anterior. O objetivo é, também, detectar a estabilidade no crescimento do lucro da empresa. Uma forma de ser equacionado é:

$$NALD = \sum_{t=1}^{10} \delta_t \quad (2.20)$$

sendo  $\delta_t = 1$ , se  $\text{Lucro}_t \leq 0,95 \times \text{Lucro}_{t-1}$  ou  $\delta_t = 0$ , se  $\text{Lucro}_t > 0,95 \times \text{Lucro}_{t-1}$

Da mesma forma que o indicador anterior, quando ocorrer da empresa não possuir histórico de 10 anos para a análise, foi considerado o maior tempo possível para o cálculo da média.

Por meio desses seis índices, tem-se uma visão geral da rentabilidade e do desempenho de uma empresa, bem como do seu crescimento e sua estabilidade.

### 2.1.7 Indicadores de Liquidez e Estrutura do Capital

Os índices de liquidez possuem como fundamental preocupação revelar como está a situação da empresa para fazer frente às suas obrigações. Os índices mais utilizados são o de Liquidez Geral, corrente e seca. Além desses, um índice de Liquidez Geral modificado também foi usado por fazer parte da abordagem de Graham.

O grupo de índices de Estrutura do Capital evidencia a situação financeira da entidade contábil, isto é, procura apontar os grandes caminhos das decisões financeiras em termos de obtenção e aplicação de recursos e também como se encontra o nível de



endividamento.

Um aspecto importante a se destacar é que o sucesso de muitas empresas depende da qualidade da administração financeira das mesmas, especialmente de um bom gerenciamento, a fim de se obter um equilíbrio, na estrutura de capitais, entre os recursos de terceiros e os recursos próprios.

A seguir são descritos os indicadores que farão parte desse trabalho:

- a) **Liquidez Geral (LG)** – Significa o quanto a empresa possui de recursos aplicados no Ativo Circulante e o no Ativo Realizável a Longo para cobrir todos os compromissos assumidos com terceiros. Quanto maior for, maior é a solidez financeira da empresa.

$$LG = \frac{\text{Ativo Circulante} + \text{Ativo Realizável a Longo Prazo}}{\text{Passivo Circulante} + \text{Passivo Exigível a Longo Prazo}} \quad (2.21)$$

A análise do Índice de Liquidez Geral revela, em última instância, quanto de dinheiro o empreendimento possui para cada \$1,00 de dívida geral.

Há que se recomendar cuidados neste momento da análise, tendo-se em vista que quando se fala em longo prazo, nem sempre é possível identificar, pelas demonstrações contábeis, exatamente quando estarão vencendo as obrigações e quando os recursos do ativo poderão ser convertidos em numerário, isto é, o índice não revela sincronização entre recebimentos e pagamentos. Via de regra, inclusive, a facilidade de "realização" ou "liquidação" do ativo é algo mais problemático do que a necessidade de pagar as dívidas.

- b) **Liquidez Geral Modificada (LGM)** – Ao invés do usar como numerador o Ativo Circulante e o Ativo Realizável a Longo, opta-se pelo uso do Capital de Giro Líquido. Por esse fato acaba sendo uma medida muito mais conservadora, pois considera somente o capital de curto prazo como recurso para o pagamento das dívidas totais.

$$\text{LGM} = \frac{\text{Capital de Giro Líquido}}{\text{Passivo Circulante} + \text{Passivo Exigível a Longo Prazo}} \quad (2.22)$$

É o único indicador de liquidez que pode apresentar valores negativos, caso o capital de giro líquido da companhia seja negativo, ou seja, não exista entre os ativos circulantes recursos suficientes para se pagar as dívidas de curto e longo prazo. É usado nos filtros de Graham, nos quais se deseja que as empresas possuam esse índice maior do que 0,5.

- c) **Liquidez Corrente (LC)** – Reflete a capacidade de pagamento da empresa no curto prazo. Um índice menor do que um indica que a empresa tem mais obrigações a vencer no exercício do que ativos a realizar.

$$\text{LC} = \frac{\text{Ativo Circulante}}{\text{Passivo Circulante}} \quad (2.23)$$

Para contornar a falta de informação sobre a sincronização de ativos e passivos de longo prazo, esse é um índice de liquidez que envolve somente as contas de curto prazo. Contudo, há outro cuidado a se tomar, que é o fato de que, da mesma forma que o de Liquidez Geral, “o índice não revela a qualidade dos itens do Ativo Circulante (os estoques são superavaliados, são obsoletos, os Títulos a Receber são totalmente recebíveis?)” (MARION, 2005, p. 458). Mesmo assim, é um índice muito valioso no sentido de se diagnosticar se a empresa está ou não em condições de honrar seus compromissos mais imediatos.

- d) **Liquidez Seca (LS)** – O quociente revela a capacidade financeira líquida da empresa para cumprir com os compromissos assumidos de curto prazo, ou seja, quanto a empresa tem de Ativo Circulante Líquido para cada real do Passivo Circulante. Quanto maior este for este quociente, melhor para a empresa.

$$\text{LS} = \frac{\text{Ativo Circulante Líquido}}{\text{Passivo Circulante}} \quad (2.24)$$

O índice de Liquidez Seca assemelha-se ao de Liquidez Corrente, diferenciando-se apenas no fato de se excluírem os estoques a fim de se reduzir um fator de incerteza, tendo em vista que, ainda que este faça parte do Ativo Circulante, não se tem plena certeza do tempo da sua realização, também porque o Passivo Circulante é líquido e certo.

Outra forma de se visualizar a Liquidez Seca é de acordo com o que diz MARION (2005, p.461): “Se a empresa sofresse uma total paralisação das suas vendas, ou se o seu Estoque fosse obsoleto, quais seriam as chances de pagar as suas dívidas com Disponível e Duplicatas a Receber?”.

Em firmas em que os prazos médios de contas a receber e a pagar sejam assemelhados, este se torna um dos quocientes mais significativos para se elucidar a posição da firma, isto porque evidencia quanto a empresa possui de Ativo Líquido para cada \$1,00 de dívidas de curto prazo.

- e) **Liquidez Imediata (LI)** – É a medida de liquidez mais curto prazo possível. Mostra quanto a companhia dispõe imediatamente para liquidar as dívidas de até um ano ao somar as contas de caixa, bancos e aplicações de curtíssimo prazo e dividir a soma pelo passivo circulante.

$$LI = \frac{(\text{Caixa} + \text{Bancos} + \text{Aplicações de Curtíssimo Prazo})}{\text{Passivo Circulante}} \quad (2.25)$$

- f) **Grau de Endividamento (GE)** – Também chamado de Grau de Endividamento de Terceiros. Mostra que quanto menor for a participação de capitais de terceiros na empresa, menor é seu Grau de Endividamento, e maior sua liberdade financeira para tomar decisões. Sempre que o quociente for inferior a 1, indicará o excesso de Capitais Próprios sobre os Capitais de Terceiros. Por outro lado, se superior a 1, significa que os Capitais de Terceiros foram investidos na empresa em proporções maiores que os Capitais Próprios, evidenciando a existência de

dependência financeira junto aos seus credores. É dado pela equação:

$$GE = \frac{\text{Passivo Circulante} + \text{Exigível de Longo Prazo}}{\text{Patrimônio Líquido}} \quad (2.26)$$

Se a empresa for visualizada sob o prisma financeiro, pode-se afirmar que, quanto menor este índice, melhor; isto porque, quanto maior ele for, maior é a dependência da empresa junto a terceiros e menor, então, a sua liberdade de decisões financeiras.

Já sob o prisma de obtenção de lucro, MATARAZZO (2003, p.160) afirma que “[...] pode ser vantajoso para a empresa trabalhar com capitais de terceiros, se a remuneração paga a esses capitais de terceiros for menor que o lucro conseguido com a sua aplicação nos negócios”. Todavia, o índice Grau de Endividamento deve ser interpretado sob o ponto de vista financeiro para se detectar o risco de insolvência, e não em relação ao lucro.

- g) **Grau de Endividamento Modificado (GEM)** – GRAHAM e DODD (1951) apresentam uma pequena variação do que hoje é conhecido por Grau de Endividamento de Terceiros. Para o cálculo dessa medida exclui-se o Ativo Intangível do Patrimônio Líquido, resultando como denominador o Valor Contábil Tangível

$$GEM = \frac{\text{Passivo Circulante} + \text{Exigível de Longo Prazo}}{\text{Valor Contábil Tangível}} \quad (2.27)$$

Da mesma forma que o anterior, quanto menor este índice, melhor.

- h) **Garantia do Capital Próprio ao Capital de Terceiros (GCPCT)** – É a relação de cada unidade monetária de capital próprio disponível para garantir uma unidade monetária de capital de terceiros.

$$GCPCT = \frac{\text{Patrimônio Líquido}}{\text{Passivo Circulante} + \text{Exigível de Longo Prazo}} \quad (2.28)$$

Do ponto de vista da aquisição de crédito, quanto menor este índice, melhor.

- i) **Participação de Capital de Terceiros (PCTRT)** – Similar ao Grau de Endividamento, sua alteração é dividir o passivo total pelo passivo total somado ao patrimônio líquido.

$$PCTRT = \frac{\text{Passivo Circulante} + \text{Exigível de Longo Prazo}}{\text{Passivo Circulante} + \text{Exigível de Longo Prazo} + \text{Valor Contábil Tangível}} \quad (2.29)$$

Do ponto de vista da solvência, quanto menor este índice, melhor.

- j) **Composição do Endividamento (CP)** – Também conhecido por Endividamento de Curto Prazo. Revela a proporção existente entre as obrigações de curto prazo (Passivo Circulante) e as obrigações totais, ou seja, o quanto a empresa terá de desembolsar a curto prazo, para cada real do total das obrigações existentes. Também é conhecido por Composição do Endividamento, pois identifica que percentual das obrigações totais da firma corresponde a dívidas de curto prazo.

$$CP = \frac{\text{Passivo Circulante}}{\text{Passivo Circulante} + \text{Exigível de Longo Prazo}} \quad (2.30)$$

De forma geral, quanto menor for este índice, melhor; ou seja, é muito mais conveniente para a empresa que suas dívidas sejam de longo prazo, pois desse modo ela terá mais tempo para buscar ou gerar recursos para saldá-las. Vale ressaltar, entretanto, que se os recursos no curto prazo forem mais baratos esta análise ou interpretação de quanto menor melhor pode inverter-se.

Esses dez indicadores financeiros, oito amplamente utilizados na literatura nacional e dois inseridos devido à abordagem de Graham, são capazes de fornecer uma visão sobre a capacidade da empresa em honrar seus compromissos assumidos, de mostrar características da dívida e da sua estrutura de capital. Servem, portanto, para relacionar a rentabilidade das ações ao risco de solvência da sociedade anônima.

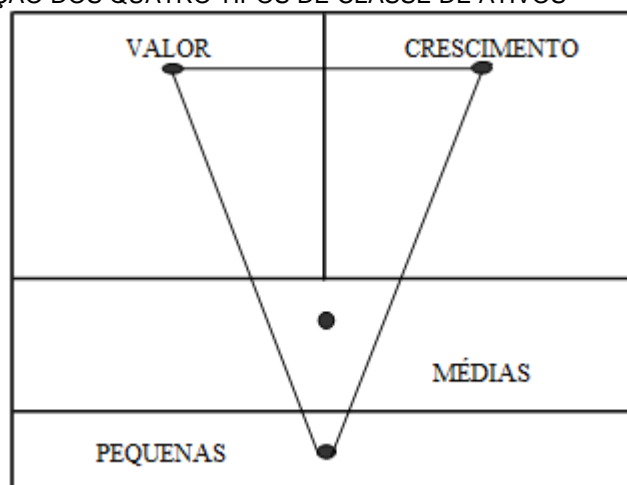
### 2.1.8 Investimento em Valor – Abordagem de Graham

Com o avanço das pesquisas na área, vários estilos de investimentos foram identificados e estudados, sobretudo a partir de 1970 nos Estados Unidos. Desses trabalhos, a Análise Fundamentalista pode ser classificada, basicamente, em duas correntes: o investimento em valor (*value*) e o investimento em crescimento (*growth*).

De forma resumida, o investimento em valor se concentra em empresas grandes e consolidadas no mercado, com taxas de crescimento estável, maior distribuição de dividendos e baixos múltiplos P/L e P/VC. A oposição a esses conceitos são as ações de crescimento (*growth stocks*), que possuem altas taxas de crescimento, distribuição pequena ou inexistente de dividendos e altos múltiplos P/L e P/VC que refletem uma grande expectativa sobre os lucros futuros.

SHARPE (1992) identificou que tamanho, *value* e *growth* eram características capazes de explicar o retorno obtido por portfólios de ação. Analisando o desempenho de fundos de investimento nos Estados Unidos, no período de 1985 até 1989, o autor verificou que, praticamente, duas variáveis eram capazes de diferenciar os retornos dos fundos: *value/growth* e *small/large*. A figura 2.4 ilustra a composição dessas quatro classes de ações segundo SHARPE (1992).

FIGURA 2.4 – COMPOSIÇÃO DOS QUATRO TIPOS DE CLASSE DE ATIVOS



Essa classificação permite definir o investimento em valor como aquele no

qual se procura empresas grandes e consolidadas, cujas ações estejam subvalorizadas em relação aos ativos que já possui. O investimento em crescimento também consiste na seleção de ações subvalorizadas, mas do ponto de vista do potencial de crescimento de seus lucros.

Para DAMODARAN (2006a, p. 228) o investimento em valor pode ser dividido em três correntes:

A primeira forma de investir em valor [...] é a filtragem passiva, na qual as empresas são passadas por uma série de filtros (por exemplo, baixos índices P/L, liquidez e baixo risco) e as que são aprovadas por estes critérios são consideradas bons investimentos. A segunda forma de investir em valor é o investimento em valor contrário, onde são comprados os ativos pelos quais o mercado não se interessa devido ou ao seu mau desempenho no passado ou a informações desfavoráveis a seu respeito. A terceira forma é a ativista, na qual os investidores compram direitos acionários de empresas subavaliadas ou mal geridas e, a partir daí, usam o poder de sua posição (que precisa ser expressiva) para forçar as mudanças que turbinarão este valor.

A filtragem passiva foi criação de Benjamin GRAHAM e David DODD (1951), que identificaram certas características nas empresas (boa gestão, baixo risco e bons lucros), como determinantes para que as ações dessas empresas tivessem um desempenho acima da média. Os autores traduziram essas características qualitativas em filtros quantitativos que, portanto, poderiam ser usados na identificação de investimentos promissores.

A própria noção de investimento é particular para esses autores, que a definem como “uma operação que, após análise profunda, promete a segurança do principal e um retorno adequado” (GRAHAM; DODD, 1951, p. 43).

Análise profunda implica conhecer o mercado do qual se participa, as ferramentas de seleção e a natureza dos ativos nos quais se investe. No caso das ações, deve se ter em mente que ao adquirir uma ação o investidor está se tornando sócio da empresa, sendo necessário conhecer o funcionamento dessa empresa, da economia na qual se insere e nas técnicas provenientes de diversas áreas para avaliação de seus ativos. Ponto fundamental é que o preço dessa ação pode não refletir

momentaneamente o valor da empresa, o investidor deve aproveitar as oscilações do mercado para adquirir ações cujo valor intrínseco está abaixo do seu Preço de Mercado.

Segurança do principal significa não se expor demasiadamente ao risco de perder capital. Para isso GRAHAM (2007, p. 139) sugere “uma diversificação adequada, porém não excessiva. Isso significa um mínimo de dez ações diferentes e um máximo de aproximadamente 30”. Quando não é possível selecionar 10 ativos através dos critérios de seleção estabelecidos, uma alternativa é mesclar a aplicação em ações com aplicações em títulos do governo, entendido como livre de risco. A sugestão de não mais de 30 é evitar custos de transação desnecessários visto que novas ações trariam benefícios praticamente insignificantes para a relação risco-retorno.

Esse conceito de diversificação como forma de diluição do risco foi introduzido mesmo antes da Teoria de Portfólios de MARKOWITZ (1952), se tornando o cerne desta. Todavia, além de diversificar, o investidor deveria comprar ações não somente quando o preço fosse inferior ao valor intrínseco, mas quando fosse muito inferior, concedendo uma margem de segurança para o investimento.

A concepção de margem de segurança é fundamental na abordagem de Graham, seu uso se justifica por vários fatores, devido ao risco de os critérios de seleção não serem os mais adequados, das informações contábeis necessárias não serem as mais exatas, dos controladores da empresa serem vistos com suspeitas e do crescimento econômico ser incerto. “A função da margem de segurança é, em essência, tornar desnecessária uma estimativa precisa do futuro” (GRAHAM, 2007, p. 556). Isso leva ao investimento em empresas que sejam mais estáveis e apresentem, portanto, menor variação nas estimativas futuras, caracterizando o investimento em valor.

Dessa forma, ao manter sua carteira diversificada e comprada com uma boa margem de segurança, mesmo nos momentos mais instáveis do mercado ou mesmo



que os critérios de seleção não se mostrassem os mais corretos, o capital aplicado não sofreria impactos catastróficos, servindo aos propósitos de proteção do principal.

Quando Graham afirma que o investidor deve esperar um retorno adequado e não extraordinário, ele também está, de certa forma, se antecipando aos modelos de precificação que seriam formalmente desenvolvidos posteriormente, no qual retornos elevados estão associados a riscos elevados. Isso significa que os retornos esperados ano após ano, não irão superar em muito os retornos do mercado, mas ao contrário deste, oscilarão pouco e, no longo prazo, podem produzir grandes resultados. Por isso a confiança nas técnicas de seleção, a disciplina ao manter as posições consolidadas e a paciência por esperar resultados no longo prazo são comportamentos necessários ao investidor que opta pela abordagem de Graham.

Na primeira edição de *Security Analysis*, de 1934, Graham e Dodd expuseram essas e outras ideias acerca dos mercados e propuseram dez filtros usados na identificação de ativos que satisfizessem os critérios aqui apresentados, de formação de uma carteira diversificada, com ações subavaliadas e tendo em vista o longo prazo. Nas edições posteriores os parâmetros presentes nesses filtros sofreram pequenas modificações. Os qualificadores aqui apresentados são da 3ª e última edição, de 1951, eis os filtros:

1. Um índice lucro/preço igual o dobro do rendimento de um título de renda fixa classificado como AAA (baixo risco);
2. Múltiplo Preço por Lucro, P/L, da ação menor que 40% do P/L médio do mercado nos últimos cinco anos;
3. Taxa de dividendos maiores do que dois terços do rendimento de um título de renda fixa classificado como AAA;
4. Preço inferior a dois terços do Valor Contábil Tangível, entendido como o Patrimônio Líquido menos o Ativo Intangível;
5. Preço inferior a dois terços do Capital de Giro Líquido, compreendido

- como sendo Ativo Circulante menos a Dívida Total;
6. Dívida total menor que o Valor Contábil Tangível;
  7. Ativo Circulante mais de duas vezes maior que o Passivo Circulante;
  8. Dívida total menor que duas vezes o Capital de Giro Líquido;
  9. Crescimento do lucro por ação maior do que 7% durante os últimos 10 anos;
  10. Não mais do que dois anos de lucros em declínio de 5% ou mais nos últimos 10 anos. (GRAHAM; DODD, 1951)

Segundo os autores, com as empresas selecionadas por esses filtros monta-se uma carteira diversificada que, no longo prazo, tende a apresentar desempenho acima da média do mercado.

Nesta lista os itens de 1 a 5 são critérios de “preço”, estão relacionados aos múltiplos de mercado e seu uso para a identificação de ações subavaliadas, já dentro de uma grande margem de segurança. Os filtros de 6 a 8 se referem à saúde financeira da empresa – sua estrutura de capital e seu risco de solvência. Os dois últimos mostram a estabilidade dos lucros da empresa, servindo como medidas de risco em relação à rentabilidade. De maneira sintética pode-se dizer que os primeiros cinco filtros avaliam se a empresa está “barata” e os cinco últimos se ela é uma “boa empresa”, a seleção de empresas boas e baratas é o centro dos filtros de Graham.

Por ser uma avaliação bastante conservadora, poucas ações passam pelos 10 filtros (ao menos com seus qualificadores originais) e muitas ações com enorme potencial são excluídas. Para minimizar esse problema, LOWE (1997, p. 100) afirma que “uma companhia que possua 7 dos 10 critérios pode ser considerada como subavaliada e com adequada margem de segurança”. A autora também chama a atenção que diferentes investidores podem atribuir pesos maiores a alguns critérios em detrimento de outros, como ignorar o filtro 3, sobre dividendos, se estiverem focados em empresas com grande crescimento dos lucros e que, portanto, satisfaçam com folga

os critérios 9 e 10.

Observa-se que os dois primeiros filtros se baseiam no múltiplo P/L, apenas empresas com baixos múltiplos preço/lucro poderiam passar por eles. Porém a estratégia de seleção de ações com baixos P/L geralmente leva o investidor a selecionar, indesejavelmente, empresas de baixo crescimento e risco elevado (DAMODARAN, 2006b). É interessante notar que os filtros posteriores foram, em sua maioria, concebidos justamente para eliminar ações cujos baixos índices P/L se devam aos motivos indesejados citados. Para clarificar melhor a função de cada um desses dez critérios, cabe uma discussão mais apurada sobre eles:

1. Um índice lucro/preço igual o dobro do rendimento de um título de renda fixa classificado como AAA (baixo risco);

O primeiro critério usa o inverso do múltiplo P/L, que indica a rentabilidade de uma empresa em relação ao seu valor de mercado, em comparação com a taxa de juros de risco virtualmente nulo. Sua função é mostrar se uma empresa é capaz de proporcionar atualmente o dobro de rendimento de um título AAA. A intenção de um índice lucro/preço igual ao dobro da taxa livre de risco é justificada pelo maior risco que envolve a aplicação em ações em relação ao mercado de renda fixa, sendo um rendimento igual ao dobro do livre de risco um prêmio satisfatório para o investidor.

A classificação AAA é dada por agências de medição de risco como a *Moody's* e a *Standard & Poors* para títulos cujo risco de calote é praticamente inexistente. Uma adaptação para o cenário nacional é frequentemente dado pela taxa básica de juros brasileira Selic, que em fevereiro de 2011 estava definida em 11,25% ao ano<sup>3</sup>.

Portanto, para satisfazer esse critério o índice P/L deveria estar abaixo de 4,44. Um valor extremamente baixo para o mercado acionário brasileiro, mas os títulos

---

<sup>3</sup> <http://www.bcb.gov.br/>

nacionais não possuem a classificação AAA exigida pelo filtro. Ativos mundialmente aceitos como livres de risco são os títulos do governo norte-americano, que em fevereiro de 2011 apresentavam rentabilidade de 0,25% ao ano<sup>4</sup>, ainda fruto das medidas tomadas para conter a crise estadunidense. Usando essa taxa de juros como parâmetro, as ações devem possuir índice P/L inferior a 20 que é um valor bem pouco restritivo.

Para facilitar o uso do método das carteiras para avaliar o retorno produzido pelos filtros de Graham e buscar parâmetros qualificadores mais adequados ao mercado acionário brasileiro, esse primeiro filtro pode ser equacionado pelo múltiplo P/L, quanto menor, melhor.

2. Múltiplo Preço por Lucro, P/L, da ação menor que 40% do P/L médio do mercado nos últimos cinco anos;

O segundo filtro também envolve o múltiplo P/L, mas, ao invés de compará-lo com a rentabilidade dos títulos sem risco, o compara com o P/L do próprio mercado. Sua intenção é identificar ações muito abaixo (40%) da média e que, portanto, podem estar subavaliadas caso sua rentabilidade e seu risco financeiro seja adequado.

Graham insiste na média multianual do P/L do mercado para se diminuir as chances de sub ou superestimar os valores devido a surtos temporários e insustentáveis, porém para economias com taxas de crescimento elevado, esse filtro pode se tornar muito restritivo ao atribuir muito peso aos índices passados.

Há ainda outro problema no uso da média simples. O fato dos múltiplos P/L não serem menores do que zero, mas poderem assumir valores muito elevados (existem dezenas de empresas com P/L acima de 100 e, até, casos com P/L acima de 1000 sendo negociadas na Bovespa no final de 2010), tem como consequência a elevação da média devido aos valores extremos. Portanto, uma estatística muito mais

---

<sup>4</sup> <http://www.federalreserve.gov/>

significativa seria a mediana do P/L, porém usar a mediana iria distorcer o parâmetro de 40% para a média, exigindo uma porcentagem menor para se obter a mesma classificação do filtro. Em 2007, por exemplo, a média dos últimos 5 anos do P/L para as mercado nacional era de 31,74 e sua mediana era de 15,26. Como o qualificador de 40% de Graham se aplicava à média e não à mediana, ficaria estipulado o P/L máximo em 12,70.

Como mercados de alta duradouros podem elevar demais esse índice, Graham também sugere um limite superior para que uma empresa seja considerada com preço atraente: “O investidor deve impor algum limite no preço que pagará por uma ação em relação a seus lucros médios, nos, digamos, últimos sete anos. Sugerimos que esse limite seja estabelecido em 25 vezes tais lucros médios e não mais do que 20 vezes os dos últimos 12 meses” (GRAHAM, 2007, p. 139).

A porcentagem de 40% do P/L médio no final de 2007 estaria abaixo do máximo estipulado por Graham e também abaixo do valor estabelecido pelo primeiro filtro. Sendo, no cenário brasileiro, redundante usar o segundo critério quando se procura empresas que passam pelos 10 filtros. Porém se a exigência for satisfazer apenas 7 filtros, ele passa a ser relevante, por ser, no momento, menos restritivo que o primeiro.

### 3. Taxa de dividendos maiores do que dois terços do rendimento de um título de renda fixa classificado como AAA;

A taxa de dividendos paga por uma empresa – *Dividend Yield* – corresponde a um retorno para o investidor além do ganho de capital devido à valorização da ação, já que é distribuído em dinheiro para o acionista em datas determinadas pela empresa.

Pela taxa de juros brasileira, esse filtro seleciona empresas com taxas de distribuição de dividendos de 7,5%. Se for usada a taxa básica de juros americana, para se manter fiel ao título de classificação AAA, o *Dividend Yield* necessário passa a

ser de somente 0,167%. A média da taxa de dividendos, em 2010, no Brasil foi de 4,34%.

Logo, na construção de carteiras que seguem os filtros de Graham, a variável *Dividend Yield* é do tipo quanto maior, melhor.

4. Preço inferior a dois terços do Valor Contábil Tangível, entendido como o Patrimônio Líquido menos o Ativo Intangível;

Esse filtro é responsável pela avaliação rigorosa de uma ação subavaliada, lhe concedendo uma boa margem de segurança. Normalmente, pesquisadores e analistas de investimento usam somente o Valor Contábil da empresa nessa comparação, Graham é mais conservador excluindo do Patrimônio Líquido o Ativo Intangível. Ele faz isso por ser difícil mensurar o valor intangível das empresas, podendo apresentar distorções extremamente elevadas.

Quando satisfeito, esse filtro mostra que seria possível adquirir a empresa por 33% menos do seu valor contábil excluindo-se os itens intangíveis como poder de marcas, franquias, patentes etc. Corresponde ao múltiplo P/VCT, que é do tipo quanto menor, melhor.

Para exemplificar essas distorções dentro os participantes do índice Ibovespa, em 2008, a empresa que declarou o maior ativo intangível em termos absolutos foi a Companhia Vale do Rio Doce, com R\$9,5 bilhões, correspondente a 7,75% do seu Ativo Total. Em valores percentuais a empresa Net Serviços de Comunicação foi a recordista, apresentando em seus Ativos Intangíveis R\$ 1 bilhão, equivalente a 33% de todos os seus Ativos. No entanto, antes de 2005, são praticamente desprezíveis as diferenças entre o patrimônio líquido e o patrimônio líquido tangível das empresas brasileiras de capital aberto.

5. Preço inferior a dois terços do Capital de Giro Líquido, compreendido como sendo Ativo Circulante menos a Dívida Total;

Esse é, com certeza, o critério mais restritivo, afinal o Preço de Mercado da empresa deveria ser pelo menos 33% inferior ao seu valor caso fosse liquidada instantaneamente. Por isso é o critério mais poderoso para revelar se uma empresa está subavaliada, pois trata de comparar o seu Preço de Mercado aos ativos mais líquidos da companhia, facilmente transformáveis em espécie. Quando satisfeito significa que seria possível adquirir a empresa sem pagar nada pelos seus ativos permanentes, como terrenos, prédios e maquinário.

Segundo GRAHAM (2007, p. 53):

Por mais estranho que pareça, tais anomalias não eram difíceis de encontrar. Em 1957, foi publicada uma lista apresentando quase duzentas ações desse tipo disponíveis no mercado [norte-americano]. De diversas formas, praticamente todas essas ações subvalorizadas acabaram sendo rentáveis, e seus resultados médios anuais provaram ser muito mais remuneradores do que a maioria dos outros investimentos. Porém, elas virtualmente desapareceram do mercado de ações na década seguinte e com elas uma oportunidade para operações inteligentes e bem-sucedidas por parte do investidor empreendedor. No entanto, aos preços baixos de 1970, apareceu novamente um volume considerável de tais ações ‘abaixo do capital de giro’ e, apesar da recuperação forte do mercado, sobrou um número suficiente delas no fim do ano para compor uma carteira de porte razoável.

Portanto satisfazer esse filtro de Graham parece ser algo raro quando os mercados estão em alta, mas oferecem uma grande oportunidade quando é possível encontrar empresas nessas condições. Para comparação das companhias segundo esse filtro, foi usado o múltiplo P/CGL do tipo quanto menor, melhor.

#### 6. Dívida total menor que o Valor Contábil Tangível;

Iniciam-se os juízos sobre o risco financeiro da firma. Esse filtro corresponde ao índice Grau de Endividamento, levemente modificado, que indica a estrutura de capital da empresa. É do tipo quanto menor, melhor.

O desejado por esse filtro é o crescimento do valor contábil tangível e a diminuição da dívida total. Isso demonstraria a força financeira da empresa que é capaz de produzir mais recursos do que sua necessidade de financiamento. O que é,

para GRAHAM (2007, p. 343), a definição mais básica possível de um bom negócio: “Ele gera mais dinheiro do que consome. Administradores bons encontram maneiras de usar esse dinheiro de modo produtivo. No longo prazo, é quase certo que as companhias enquadradas nessa definição crescerão em valor, independentemente da evolução do mercado de ações”. No Brasil, a média do índice do Grau de Endividamento em 2010 era de 3,27. Para comparação, em 2005, ele era de 1,10. É um dos indicadores mais suscetíveis a mudanças de acordo com o cenário econômico.

7. Ativo Circulante mais de duas vezes maior que o Passivo Circulante;

Corresponde ao indicador Liquidez Corrente, quanto maior, melhor. É altamente desejável que a empresa tenha uma Liquidez Corrente maior que 1, pois significa que possui, no curto prazo, ativos para saldar suas dívidas imediatas. Esse critério é ainda mais conservador para Graham, que estabelece como desejável um índice maior que 2. A mediana das empresas da Bovespa, em 2010, foi de uma Liquidez Corrente de 1,45.

8. Dívida total menor que duas vezes o Capital de Giro Líquido;

Esse filtro é a Liquidez Geral Modificada, quanto maior melhor. Uma empresa financiada conservadoramente teria disponível em caixa, pelo menos, metade do valor de suas dívidas, o que lhe concederia um risco muito baixo de inadimplência. Exemplificando, em 2007, a mediana desse índice era de 0,29, enquanto o desejável pelo filtro seria de mais de 0,5.

9. Crescimento do lucro por ação maior do que 7% durante os últimos 10 anos;

“Se os lucros do proprietário por ação crescerem a uma média estável de, pelo menos, 6% ou 7% nos últimos dez anos, a companhia é uma geradora de dinheiro



estável e suas perspectivas de crescimento são boas” (GRAHAM, 2007, p. 343).

O maior problema das empresas negociadas a baixos múltiplos de mercado (alvo dos 5 primeiros filtros) é possuir também baixo crescimento, esse filtro, quanto maior, melhor, busca evitar isso estabelecendo uma média de crescimento mínima para as empresas. O crescimento mediano dos lucros das companhias da Bovespa foi de 15,2% em 2006. Mesmo com a crise do *subprime*, em 2009 a mediana dos lucros era de 8,95%, também superior ao parâmetro estabelecido pelo filtro, o que se deve, provavelmente, ao Brasil ser um país em desenvolvimento e, portanto, ter índices de crescimento econômico geralmente maiores do que os dos países desenvolvidos.

10. Não mais do que dois anos de lucros em declínio de 5% ou mais nos últimos 10 anos.

A estabilidade dos lucros é o alvo desse último critério, do tipo quando menor, melhor. O objetivo é que somente empresas que possuam pequenas variações nos seus lucros, indicando um crescimento sustentável, façam parte da carteira do investidor.

O retorno proporcionado pela aplicação desses 10 filtros em sua forma completa ou parcial (com empresas que satisfazem 7 das 10 condições) às empresas de capital aberto negociadas no Brasil é um dos objetivos específicos dessa pesquisa.

A ideia por detrás dos filtros é identificar padrões nas empresas que apresentam bons rendimentos no longo prazo. Isso foi fruto de pesquisa de quase seis décadas por parte de Benjamin Graham e, pelos seus resultados, se mostrou válido para o mercado norte-americano tanto no período em que o autor foi vivo como posteriormente a sua morte em 1976 (OPPENHEIMER, 1984; ZARGHAM; HU, 1996; DAMODARAN 2006b).

Graham tinha a noção que ao se “analisar um volume grande de dados por tempo suficiente, um número imenso de padrões emergirá, ao menos por acaso.

Aleatoriamente, por pura sorte, as companhias cujas ações produzem retornos acima da média terão muitas coisas em comum” (GRAHAM, 2007, p. 65). A busca do autor é por identificar fatores que provoquem esses altos retornos, que sejam a causa do alto desempenho e não encontrar fórmulas baseadas apenas em coincidências estatísticas aleatórias.

A abordagem de Graham serve como subsídio e fundamentação teórica de fundo para o desenvolvimento de formas de reconhecimento de padrões através de técnicas estatísticas com base em variáveis econômicas, financeiras e bursáteis.

## 2.2 ANÁLISE MULTIVARIADA

### 2.2.1 Conceitos Básicos

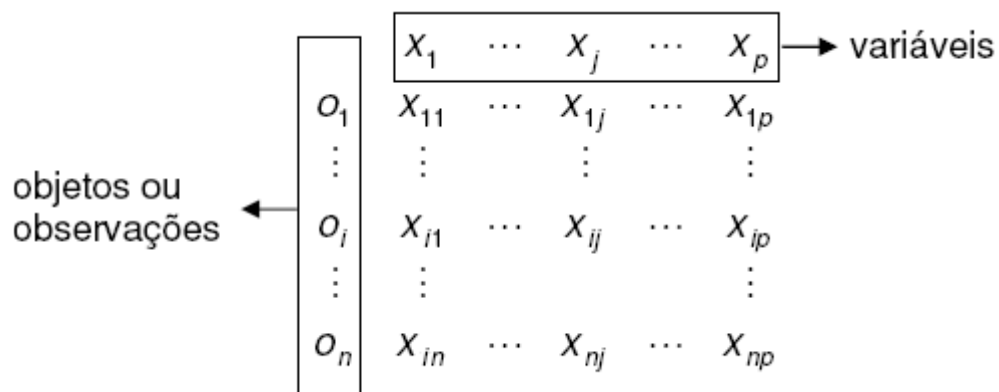
A Análise Multivariada, dentro da Ciência Estatística, se preocupa com os métodos usados para descrever e analisar dados de muitas variáveis simultaneamente, ou seja, descreve e analisa dados sobre vetores aleatórios. Com o desenvolvimento e a popularização dos computadores, além da disponibilidade de um grande número de *softwares* estatísticos, a Análise Multivariada avançou em muitos campos e tornou-se uma técnica essencial a pesquisadores de vários setores, com aplicações na indústria, na economia, no meio acadêmico, entre outros.

A Análise Multivariada é utilizada nos casos onde os dados, de um ou mais objetos de interesse, são mensurados por medidas simultâneas ou por diversas variáveis de interesse, ou seja, dados sobre várias características dos objetos. É uma abordagem que oferece ao pesquisador uma dimensão muito mais rica do que a comumente encontrada em abordagens univariadas.

A Estatística Multivariada, segundo MINGOTI (2005), consiste em um conjunto de métodos aplicados em situações onde várias variáveis são medidas simultaneamente em cada elemento amostral.

Segundo MARDIA, KENT e BIBBY (1979, p. 1), se há  $n$  objetos,  $o_1, \dots, o_n$ , sendo que cada objeto é possuidor de  $p$  características representadas pelas variáveis,  $x_1, \dots, x_p$  um arranjo numérico pode ser representado por uma matriz de dados de ordem  $(n \times p)$ , onde cada linha corresponde a um objeto (observação  $p$ -variada) e cada coluna corresponde a uma variável que é observada para a característica correspondente. Essa matriz de dados é a base da Análise Multivariada e representa  $n$  observações do vetor aleatório  $\underline{X}$  de dimensão  $p$ . Pode ser escrita da seguinte forma:

FIGURA 2.5 – MATRIZ DE DADOS



De acordo com JOHNSON e WICHERN (1998, p. 2), verifica-se que os principais objetivos científicos da aplicação dos métodos multivariados são:

- 1) Redução de dados ou simplificação estrutural;
- 2) Classificação e agrupamento;
- 3) Investigação de dependência entre variáveis;
- 4) Predição;
- 5) Teste e construção de hipóteses.

### 2.2.2 Estatísticas Descritivas

Um conjunto grande de dados faz com que se torne complexa a visualização de informações pertinentes. A maioria das informações contidas na matriz de dados

podem ser entendidas e avaliadas através do cálculo de estatísticas descritivas que resumem as informações de forma adequada. Muitas vezes, por não ser possível trabalhar com toda a população usa-se uma parte da mesma, a amostra, com as estatísticas descritivas funcionando como estimadores dos parâmetros (JOHNSON; WICHERN, 1998). As estatísticas descritivas que mensuram posição, variação e associação linear são enfatizadas a seguir.

Na estimação do vetor médio  $\underline{\mu} = E(\underline{X})$ , usa-se o vetor médio amostral, definido por:

$$\bar{\underline{x}}' = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p] \text{ com } \bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n} \text{ para } j = 1, 2, \dots, p \quad (2.31)$$

Esse vetor é o estimador não-viciado do parâmetro  $\underline{\mu}$ , é consistente e eficiente na estimação de  $\underline{\mu}$ . A matriz de covariância populacional  $\Sigma = E[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})']$  é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Para a estimação dessa matriz usa-se a matriz covariância amostral  $S$ , de forma que

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

onde a variância amostral da componente  $j$  é dada por  $s_{jj} = s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n-1}$  (2.32)

e a covariância entre as componentes j e 1 é  $s_{j1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j) \cdot (x_{i1} - \bar{x}_1)}{n-1}$  (2.33)

A raiz quadrada da variância amostral é conhecida como desvio padrão amostral e tem como facilidade apresentar a mesma unidade de medida das observações. Então, se as variáveis estiverem padronizadas,  $Z_{ij} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{\sqrt{S_{jj}}}$ , tem-se a matriz de correlação  $\rho$ , que é um parâmetro populacional estimado pela matriz de correlação amostral R.

A matriz de correlação amostral R que estima o parâmetro de correlação populacional  $\rho$  tem por expressão;

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $r_{jj} = \frac{s_{jj}}{\sqrt{s_{jj}} \cdot \sqrt{s_{jj}}} = \frac{s_{jj}}{s_{jj}} = 1$  e  $r_{jl} = \frac{s_{jl}}{\sqrt{s_{jj}} \cdot \sqrt{s_{ll}}}$  (2.34)

O coeficiente de correlação amostral pode ser considerado como uma covariância amostral das observações padronizadas

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{\sqrt{S_{jj}}} \quad (2.35)$$

Esses valores padronizados são expressos sem escalas de medida, pois são centrados no zero e expressos em unidades de desvio padrão.

### 2.2.3 Teste de Hipótese $T^2$ de Hotelling

O principal uso do teste de hipótese multivariado neste trabalho é para verificar se há diferenças significativas entre os vetores de média das populações estudadas. Ele leva à aceitação da hipótese nula  $H_0$ , que indica não haver diferença entre duas amostras (empresas com retorno de ações acima da média ou não, por exemplo), ou a rejeição em favor da hipótese alternativa  $H_1$ , que indica existir diferença entre as amostras. Como todo teste estatístico, a rejeição ou aceitação leva à possibilidade de se cometer dois tipos de erro: erro tipo I, rejeitar  $H_0$  sendo que a hipótese é verdade; e o erro tipo II, aceitar  $H_0$  sendo ela falsa. A probabilidade de se cometer o erro tipo I ( $\alpha$ ) é comumente chamado de nível de significância do teste. Os testes realizados nesse trabalho utilizaram sempre  $\alpha = 5\%$ .

Sejam duas populações  $\pi_1$  e  $\pi_2$  das quais são extraídas as amostras de tamanho  $n_1$  e  $n_2$  do vetor aleatório  $\underline{X}$ , pode-se calcular as estatísticas que estimam os parâmetros populacionais  $\underline{\mu}_i$  e  $\Sigma_i$   $i = 1, 2$ ; ou seja,  $\underline{x}_1$ ,  $\underline{x}_2$ ,  $S_1$  e  $S_2$ . Para se testar a igualdade das médias, ou seja, a hipótese nula  $H_0: \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$  usa-se o teste  $T^2$  de Hotelling, equivalente ao teste t para amostras univariadas (JOHNSON; WICHERN, 1998).

As suposições necessárias quanto à estrutura dos dados para esse teste são as de que as amostras aleatórias das diferentes populações sejam independentes, que as populações possuam a mesma matriz de covariância e que cada população seja normal multivariada. Esta última condição pode ser relaxada para grandes amostras em comparação com o número de variáveis, o que é garantido pelo Teorema Central do Limite para o caso multivariado (JAMES, 2006).

De forma que para testar a hipótese nula de que os vetores médios são iguais usa-se a estatística do teste:

$$T^2 = [(\bar{\underline{x}}_1 - \bar{\underline{x}}_2) - \underline{\delta}_0]' \left[ \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) S_p \right]^{-1} [(\bar{\underline{x}}_1 - \bar{\underline{x}}_2) - \underline{\delta}_0] \quad (2.36)$$

onde  $S_p$  é a matriz de covariância amostral calculada de forma conjunta e que estima o parâmetro  $\Sigma$ , considerado comum. A forma de  $S_p$  é:

$$S_p = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (2.37)$$

e, prova-se que o produto da estatística  $T^2$  pela razão de graus de liberdade tem uma distribuição F com p e  $n_1 + n_2 - p - 1$  graus de liberdade, ou seja:

$$T^2 \frac{(n_1 + n_2 - p - 1)}{(n_1 + n_2 - 2)p} \sim F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(1 - \alpha) \quad (2.38)$$

Consequentemente, a regra de decisão para o teste é rejeitar a hipótese  $H_0$  quando o primeiro termo de (2.38) é maior que o segundo, caso contrário se aceita  $H_0$  considerando o valor fixo para o nível de significância  $\alpha$ . Não obstante, a decisão pode ser tomada com base no valor-p fornecido pela estatística do teste (produto).

#### 2.2.4 Análise de Componentes Principais

A técnica de Análise de Componentes Principais tem por objetivo explicar a estrutura de variância e covariância de um vetor aleatório, composto de p-variáveis aleatórias, através da construção de combinações lineares das variáveis originais. A qualidade da aproximação depende do número de componentes mantidas no sistema e pode ser medida através da avaliação da proporção de variância total explicada por essas (MINGOTI, 2005).

Ela é particularmente útil para transformar um conjunto de p variáveis correlacionadas em um novo conjunto de variáveis não-correlacionadas chamadas de componentes principais (MARQUES; MARQUES, 2005). Desse modo, “componentes principais são combinações lineares de variáveis aleatórias ou estatísticas que possuem propriedades especiais em termos de variância.” (ANDERSON, 1958, p. 272).

A Análise de Componentes Principais se dedica a algumas combinações

lineares que podem ser usadas para explicar os dados, perdendo no processo pouca informação (MARDIA, KENT, BIBBY; 1979). Ou seja, transformam um conjunto de  $p$  variáveis em um conjunto menor com  $k$  variáveis aleatórias não-correlacionadas, que explicam uma parcela substancial de informações do conjunto inicial.

De acordo com as definições anteriores tem-se que, algebricamente, as novas variáveis (componentes principais) são combinações lineares das variáveis originais  $X_1, X_2, \dots, X_p$  e são derivadas em ordem decrescente de importância.

Geometricamente, estas combinações lineares representam a seleção de um novo sistema de coordenadas obtido pela rotação do sistema original com coordenadas  $X_1, X_2, \dots, X_p$ . Os novos eixos  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  representam as direções com variabilidade máxima e permite uma interpretação mais simples da estrutura da matriz de covariância, em especial quando se opta por utilizar somente  $r$  novos eixos, com  $r < p$ . (JOHNSON; WICHERN, 1998, p. 458-459).

Uma grande vantagem é que as componentes principais dependem somente da matriz de covariância  $\Sigma$  ou da matriz de correlação  $R$  de  $X_1, X_2, \dots, X_p$  e que seu desenvolvimento não depende da suposição inicial de gaussianidade para os dados.

Seja  $\underline{\mathbf{X}}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$  um vetor aleatório  $p$ -dimensional com vetor de médias  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ , matriz de covariância  $\Sigma$  e autovalores:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ . Considera-se as combinações lineares, em forma vetorial:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{C}' \underline{\mathbf{X}} \quad (2.39)$$

onde:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pp} \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} E(Y_j) &= E(\mathbf{c}_j' \underline{\mathbf{X}}) = \mathbf{c}_j' \cdot E(\underline{\mathbf{X}}) = \mathbf{c}_j' \underline{\boldsymbol{\mu}} \\ V(Y_j) &= V(\mathbf{c}_j' \underline{\mathbf{X}}) = \mathbf{c}_j' \cdot V(\underline{\mathbf{X}}) \cdot \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_j' \Sigma \mathbf{c}_j \\ \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= V(\mathbf{c}_i' \underline{\mathbf{X}}, \mathbf{c}_j' \underline{\mathbf{X}}) = \mathbf{c}_i' \Sigma \mathbf{c}_j \end{aligned} \quad (2.40)$$



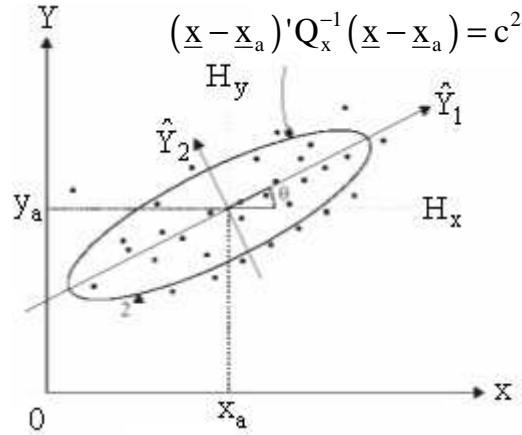
Segundo JOHNSON e WICHERN (1998, p. 459) as componentes principais são aquelas combinações lineares não correlacionadas  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  nas quais as variâncias em (2.40) são tão grandes quanto possíveis. Disto, pode-se definir que:

- A primeira componente principal como a combinação linear  $\underline{c}_1' \underline{X}$  que maximiza  $v(\underline{c}_1' \underline{X})$  sujeita à restrição  $\underline{c}_1' \underline{c}_1 = 1$ .
- A segunda componente principal como a combinação linear  $\underline{c}_2' \underline{X}$  que maximiza  $v(\underline{c}_2' \underline{X})$  sujeita às restrições  $\underline{c}_2' \underline{c}_2 = 1$  e  $Cov(\underline{c}_1' \underline{X}, \underline{c}_2' \underline{X}) = 0$ .
- A j-ésima componente principal como a combinação linear  $\underline{c}_j' \underline{X}$  que maximiza  $v(\underline{c}_j' \underline{X})$  sujeita às restrições  $\underline{c}_j' \underline{c}_j = 1$  e  $Cov(\underline{c}_j' \underline{X}, \underline{c}_i' \underline{X}) = 0$  para todo  $i < j$ .

Com isso, a reprodução da variabilidade total do sistema requer as  $p$  variáveis, porém, frequentemente, a maior parte dessa variabilidade pode ser explicada por um número menor de variáveis  $k < p$ , chamadas de componentes principais. Neste caso existe praticamente a mesma quantidade de informações nas  $k$  componente principais que nas  $p$  variáveis originais, de forma que as  $k$  componente principais podem então substituir as  $p$  variáveis originais.

Geometricamente, as combinações lineares representam a seleção de um novo sistema de coordenadas, obtido por combinação e rotação do sistema original, sendo que os novos eixos representam as direções com variabilidade máxima. Como exemplo, tem-se a representação da estrutura de componentes principais para  $p = 2$ .

FIGURA 2.6 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS COMPONENTES PRINCIPAIS NUM CASO BIDIMENSIONAL



Na prática, os parâmetros  $\underline{\mu}$  e  $\Sigma$  são desconhecidos e devem ser estimados. Supondo que se tenha uma amostra aleatória de tamanho  $n$  do vetor aleatório  $\underline{X}$ ,  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ , com  $n > p$ , são vetores  $p \times 1$  de observações independentes de  $\underline{X}$ , as estimativas de  $\underline{\mu}$  e  $\Sigma$  são dadas respectivamente pelos estimadores não-viciados:

$$\hat{\underline{\mu}} = \bar{\underline{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i \quad (2.41)$$

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})(\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})' \quad (2.42)$$

Tem-se que a  $j$ -ésima componente amostral é dada por:

$$\hat{Y}_j = \hat{\underline{e}}_j' \underline{X} = \hat{e}_{1j} X_1 + \hat{e}_{2j} X_2 + \dots + \hat{e}_{pj} X_p, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.43)$$

onde  $\hat{\underline{e}}_j$  são os autovetores de  $S$ . Os autovetores são associados aos autovalores  $\hat{\lambda}_j$ , de forma que  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p \geq 0$ . Por consequência, tem-se que  $V(\hat{Y}_j) = \hat{\lambda}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  e  $Cov(\hat{Y}_i, \hat{Y}_j) = 0$  para  $i \neq j$ .

Dessa forma, pode-se demonstrar os três resultados a seguir:

$$1) \quad \sum_{i=1}^p s_i^2 = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_p^2 = \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_p \quad (2.44)$$

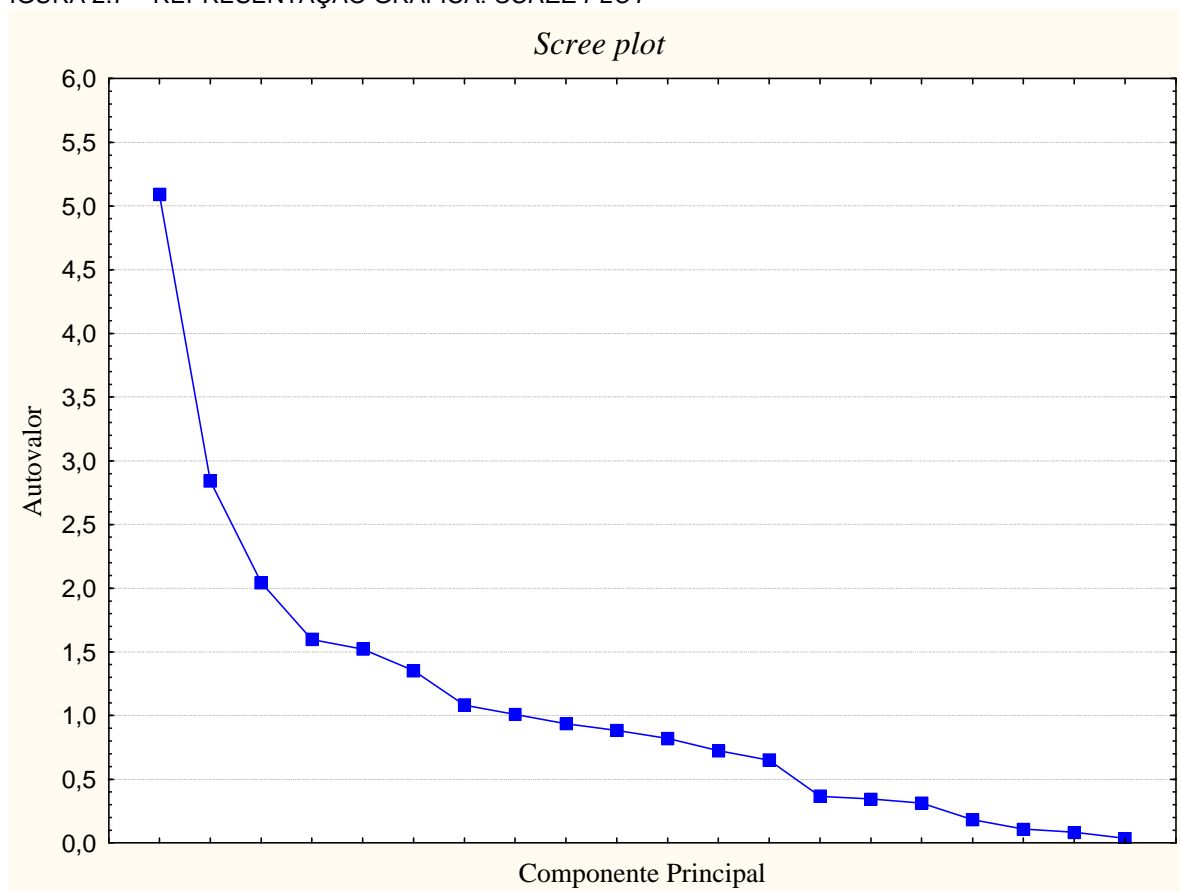
2) A proporção da variância total devido a j-ésima componente principal estimada é  $\frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_p}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ . (2.45)

3) A correlação amostral entre  $\hat{Y}_j$  e  $X_i$  é  $r_{\hat{Y}_j X_i} = \frac{\hat{e}_{ij} \sqrt{\hat{\lambda}_j}}{s_i}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, p$ . (2.46)

MARDIA, KENT e BIBBY (1979) sugerem uma maneira de descartar variáveis redundantes usando a técnica das Componentes Principais que é identificar o autovetor  $\hat{\mathbf{e}}_j$  correspondente ao menor autovalor  $\lambda_j$  e descartar, então, a variável cujo coeficiente no autovetor tiver o maior valor absoluto. A justificativa é que o autovetor com menor autovalor é o menos importante e uma variável importante nele será menos importante no conjunto. Os autores sugerem ainda que o número de variáveis descartadas pode ser igual ao número de autovalores menores ou iguais a 0,70.

Um procedimento que pode auxiliar na escolha do número de componentes principais a se trabalhar é o *scree plot*. Nesse gráfico, representam-se os autovalores de cada componente principal. É comum a diferença entre os primeiros autovalores ser grande e diminuir muito para os últimos. A sugestão é fazer o corte quando a variação passa a ser pequena (AMARAL, 2006). Adiante é apresentado um gráfico do *scree plot*.

FIGURA 2.7 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA: SCREE PLOT



Outra possibilidade é, ainda, o critério de Kaiser. Nele, utiliza-se tantas componentes principais quanto forem o número de autovalores superiores a 1.

#### 2.2.5 Descarte de Pontos atípicos (*outliers*)

O descarte de pontos atípicos (*outliers*) é feito através do método das duas primeiras componentes principais padronizadas, quando os escores apresentados fugirem ao intervalo de mais ou menos dois desvios padrões. O descarte de observações é útil tanto para maior eficiência dos modelos de classificação, quanto para descartar dados que foram digitados de forma incorreta.

### 2.2.6 Análise Fatorial

A Análise Fatorial é uma técnica de análise multivariada que tem por objetivo explicar as correlações entre um conjunto grande de variáveis em termos de um conjunto de poucas variáveis aleatórias não-observáveis chamadas fatores. Estes fatores são, então, variáveis latentes. Nas palavras de MORRISON (1976, p. 303) tem-se:

Sob o modelo fatorial cada variável resposta será representada como uma função linear com um pequeno número de fatores comuns não-observáveis e uma simples variável latente específica. Os fatores comuns geram as covariâncias entre as respostas observáveis, enquanto os termos específicos contribuem somente para as variâncias das suas respostas particulares.

A Análise Fatorial pode incluir a análise de componentes principais e análise dos fatores comuns, sendo aplicada quando há um número grande de variáveis e correlacionadas entre si, com o objetivo de identificar um número menor de novas variáveis alternativas, não correlacionadas e que, de algum modo, sumerizem as informações principais das variáveis originais encontrando os fatores ou variáveis latentes (MINGOTI, 2005).

Num primeiro momento é preciso verificar a validade da Análise Fatorial através do teste de esfericidade de Bartlett e da medida de adequacidade da amostra de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO).

O teste de esfericidade de Bartlett testa a hipótese de que as variáveis não sejam correlacionadas na população. A hipótese básica diz que a matriz de correlação da população é uma matriz identidade a qual indica que o modelo fatorial é inapropriado. A estatística do teste é dada por

$$\chi^2 = - \left[ (n-1) - \frac{2p+5}{6} \right] \ln |R| \quad (2.47)$$

que tem uma distribuição qui-quadrado com  $v$  graus de liberdade,  $v = \frac{p(p-1)}{2}$ , onde  $n$

é o tamanho da amostra,  $p$  é o número de variáveis e  $|R|$  é o determinante da matriz correlação.

Já a medida de adequacidade da amostra de Kaiser-Meyer-Olkin é representada por um índice (MSA) que avalia quão adequada é a Análise Fatorial. Ela é uma medida da homogeneidade das variáveis, que compara as correlações simples com as correlações parciais observadas entre as variáveis (MAROCO, 2003). É calculada por

$$MSA = \frac{\sum_{j \neq k} \sum_{j \neq k} r_{jk}^2}{\sum_{j \neq k} \sum_{j \neq k} r_{jk}^2 \cdot \sum_{j \neq k} \sum_{j \neq k} q_{jk}^2} \quad (2.48)$$

onde  $r_{jk}^2$  é o quadrado dos elementos da matriz de correlação original (fora da diagonal);  $q_{jk}^2$  é o quadrado dos elementos fora da diagonal da matriz anti-imagem (sendo  $q_{jk}$  o coeficiente de correlação parcial entre as variáveis  $X_j$  e  $X_k$ ).

Conforme HAIR, ANDERSON e TATHAM (1987, p. 285), valores altos (entre 0,5 e 1,0) indicam que a Análise Fatorial é apropriada, enquanto que valores baixos, abaixo de 0,5 indicam que a Análise Fatorial pode ser inadequada.

FÁVERO *et al* (2009) estabelecem uma escala mais detalhada para a estatística KMO, classificando-a como inaceitável abaixo de 0,50; entre 0,5 e 0,6 como má, mas aceitável; entre 0,6 e 0,7 razoável; entre 0,7 e 0,8 média; entre 0,8 e 0,9 boa; e superior a 0,9 como muito boa.

No modelo fatorial se pressupõe que as variáveis  $\underline{X}$  sejam linearmente dependentes sobre algumas variáveis aleatórias não-observáveis  $\underline{F}$  (com menos componentes que  $\underline{X}$ ) chamadas fatores comuns. Na forma matricial pode-se escrever o modelo por:

$$\underline{X} - \underline{\mu} = \underline{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon}$$

$${}_p\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots & \ell_{1m} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & \ell_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{p1} & \ell_{p2} & \cdots & \ell_{pm} \end{bmatrix} \quad {}_m\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} \quad {}_p\mathbf{\underline{\epsilon}}_1 = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

sendo  $\mathbf{X} \sim \bullet(\underline{\mu}, \Sigma)$  e a  $i$ -ésima componente  $\mu_i$  a média da  $i$ -ésima variável,  $\epsilon_i$  é o  $i$ -ésimo erro ou fator específico;  $F_j$  =  $j$ -ésimo fator comum;  $\ell_{ij}$  o peso ou carregamento na  $i$ -ésima variável  $X_i$  do  $j$ -ésimo fator  $F_j$ . Com  $i$  variando de 1 até  $p$  e  $j$  variando de 1 até  $m$ , para  $m \leq p$ .

Ao assumir as seguintes hipóteses:

1.  $E(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ,  $V(\mathbf{F}) = E(\mathbf{F} \mathbf{F}') = {}_m\mathbf{I}_m$
2.  $E(\mathbf{\underline{\epsilon}}) = {}_p\mathbf{0}_1$ ,  $V(\mathbf{\underline{\epsilon}}) = E(\mathbf{\underline{\epsilon}} \mathbf{\underline{\epsilon}}') = {}_p\mathbf{\Psi}_p = \begin{bmatrix} \psi_1 & & & \\ & \psi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \psi_p \end{bmatrix}$
3.  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{\underline{\epsilon}}$  são independentes, ou seja,  $\text{cov}(\mathbf{\underline{\epsilon}}, \mathbf{F}) = {}_p\mathbf{0}_m$

(2.50)

tem-se o modelo fatorial ortogonal, o qual implica a seguinte estrutura para a covariância:

1.  $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{L}\mathbf{L}' + \mathbf{\Psi}$  ou  
 $V(X_i) = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \dots + \ell_{im}^2 + \psi_i$  e  $\text{cov}(X_i, X_k) = \ell_{i1}\ell_{k1} + \dots + \ell_{im}\ell_{km}$
2.  $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \mathbf{L}$  ou  $\text{cov}(X_i, F_j) = \ell_{ij}$

(2.51)

A porção da variância que a variável contribui para o fator comum  $m$  é chamada de comunalidade. A porção da variância  $V = \text{Var}(X_i) = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$  devido ao fator específico, chama-se especificidade ou variância específica. Então se tem que

$$\underbrace{\sigma_{ii}}_{\text{Var}(X_i)} = \underbrace{\ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \dots + \ell_{im}^2}_{\text{Comunalidade}} + \underbrace{\psi_i}_{\text{variância específica}} \quad (2.52)$$

Denotando-se a  $i$ -ésima comunalidade por  $h_i^2$  tem-se

$$h_i^2 = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \dots + \ell_{im}^2 = \sum_{j=1}^m \ell_{ij}^2 \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, p \quad (2.53)$$

então  $\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = h_i^2 + \Psi_i$ . De forma que a  $i$ -ésima comunalidade é a soma dos quadrados dos carregamentos da  $i$ -ésima variável com  $m$  fatores comuns.

As comunalidades variam entre 0 e 1, sendo mais próximas de 0 quando os fatores comuns explicam baixa ou nenhuma variância da variável, e 1 quando toda a variância é explicada pelos fatores (FÁVERO *et al*, 2009).

Para estimar os carregamentos e as variâncias específicas pode-se usar o método das componentes principais. Sejam os pares de autovalores-autovetores de  $S$  (covariância amostral):  $(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1), (\hat{\lambda}_2, \hat{e}_2), \dots, (\hat{\lambda}_p, \hat{e}_p)$  onde  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p$  e sendo  $m \leq p$  o número de fatores comuns. A matriz dos pesos ou carregamentos estimados dos fatores  $\hat{L}_{ij}$  é dada por  $\hat{L} = \hat{C} \hat{D}_{\lambda}^{1/2}$ . Onde:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{e}_{11} & \hat{e}_{12} & \dots & \hat{e}_{1p} \\ \hat{e}_{21} & \hat{e}_{22} & \dots & \hat{e}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{e}_{p1} & \hat{e}_{p2} & \dots & \hat{e}_{pp} \end{bmatrix} \quad \hat{D}_{\lambda}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_1} & & & \\ & \sqrt{\hat{\lambda}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\hat{\lambda}_p} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Porém, para esse desenvolvimento, o conjunto de dados  $\underline{X}$  deve ser primeiro centralizado ou padronizado e as variâncias específicas estimadas são fornecidas pelos elementos diagonais da matriz  $\hat{\Psi} = S - \hat{L}\hat{L}'$ :

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 & & & \\ & \hat{\psi}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\psi}_p \end{bmatrix} \quad \text{com: } \hat{\psi}_i = s_i^2 - \sum_{j=1}^m \ell_{ij}^2 \quad (2.55)$$

e as comunalidades são estimadas como  $\hat{h}_i^2 = \hat{\ell}_{i1}^2 + \hat{\ell}_{i2}^2 + \dots + \hat{\ell}_{im}^2$ .

Em muitas aplicações precisa-se estimar o valor de cada um dos fatores para uma observação individual  $\underline{x}' = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ . Estas estimativas com base nos



fatores são chamados de escores fatoriais e, em várias aplicações, são usados para substituir os dados originais. Esse escore é uma representação mais econômica da informação presente nas diferentes variáveis, sendo capaz de resumir a informação presente em muitas variáveis (MAROCO, 2003).

A metodologia proposta por Bartlett para estimar os escores fatoriais consiste em estimar  $\underline{F}$  minimizando a soma dos quadrados dos erros (fatores específicos) dividido pela sua variância recíproca, que é dada por

$$\sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon_i^2}{\Psi_i} = \underline{\varepsilon}' \Psi^{-1} \underline{\varepsilon} = (\underline{x} - \underline{\mu} - L\underline{F})' \Psi^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu} - L\underline{F}) \quad (2.56)$$

que ao ser minimizado fornece como solução os escores fatoriais estimados, dados por

$$\hat{\underline{F}} = (\hat{\underline{L}}' \hat{\Psi}^{-1} \hat{\underline{L}})^{-1} \hat{\underline{L}}' \hat{\Psi}^{-1} (\underline{x} - \bar{\underline{x}}) \quad (2.57)$$

e os escores fatoriais estimados para as variáveis padronizados são dados por:

$$\hat{\underline{z}} = (\hat{\underline{L}}' \hat{\underline{L}})^{-1} \hat{\underline{L}}' \underline{z} \quad (2.58)$$

Por meio dos autovalores e dos escores fatoriais, é possível calcular o escore bruto de cada observação e, por conseguinte, ranquear as observações de acordo com essa medida. Tal escore é ponderado pelos autovalores de acordo com a equação:

$$E_j = \sum_{i=1}^k \hat{f}_j' \cdot \hat{\lambda}_i / \sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i \quad (2.59)$$

A escolha do número de fatores pode ser feita pela utilização do Critério de Kaiser, no qual se escolhe os fatores que possuem autovalores maiores que 1; ou pela escolha do número de fatores de acordo com a explicação da proporção da variância total.

Outra técnica utilizada para otimizar a resposta da Análise Fatorial é a rotação dos fatores, de forma a se obter uma estrutura para os pesos tal que cada variável tenha peso alto em um único fator e pesos baixos ou moderados nos demais fatores. Esta técnica permite uma interpretação mais clara da natureza dos fatores.

Sendo  $T$  a matriz de transformação e  $L$  a matriz estimada dos pesos dos

fatores obtida por qualquer método, então

$$\hat{L}^* = \hat{L}T, \text{ onde } TT' = T'T = I \quad (2.60)$$

é uma matriz de carregamento rotacionada.

Uma medida analítica para efetuar a rotação dos fatores é a rotação *Varimax*. O procedimento *Varimax* seleciona a transformação ortogonal T que maximiza a seguinte expressão:

$$V = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^p \tilde{\ell}_{ij}^{*4} - \frac{\left( \sum_{i=1}^p \tilde{\ell}_{ij}^{*2} \right)^2}{p} \right] \quad (2.61)$$

onde  $\tilde{\ell}_{ij}^*$  são os coeficientes finais rotacionados escalonados pela raiz quadrada das comunalidades, dado por  $\tilde{\ell}_{ij}^* = \frac{\hat{\ell}_{ij}^*}{\hat{h}_i}$ .

O método *Varimax* tem como objetivo obter uma estrutura fatorial na qual uma e apenas uma das variáveis originais esteja fortemente associada com um único fator e pouco associada com os fatores restantes (MAROCO, 2003).

Nesse momento, vale destacar as diferenças existentes entre a Análise de Componentes Principais e a Análise Fatorial, ainda que a segunda possa fazer uso da primeira. As duas técnicas buscam produzir combinações lineares de variáveis que correspondam ao máximo possível da variância das variáveis originais. Na Análise De Componentes Principais é comum se fazer uso de toda a variância. Na Análise Fatorial somente a variância compartilhada é utilizada (DANCEY e REIDY, 2004). TABACHNICK E FIDELL (2007, p. 608) colocam que "se você estiver interessado numa solução teórica não contaminada por variabilidade de erro, a análise fatorial deve ser sua escolha. Se você quiser simplesmente um resumo empírico do conjunto de dados, a análise de componentes principais é uma escolha melhor". Para GARSON (2009), "a análise de componentes principais é em geral preferida para fins de redução de dados (traduzindo o espaço das variáveis num espaço ótimo de fatores), enquanto a

análise fatorial é, em geral, preferida quando o objetivo da pesquisa é detectar a estrutura dos dados ou a modelagem causal". De acordo com HAIR, ANDERSON e TATHAM (1987), na maioria dos casos, tanto uma quanto a outra fornecem os mesmos resultados se o número de variáveis superar 30 ou se as comunalidades excederem 0,60 para a maioria das variáveis. Como se está interessado na construção e interpretações de fatores que expliquem a maior parte da variabilidade dos dados, a opção foi pelo uso da Análise Fatorial.

## 2.2.7 Reconhecimento de Padrões

Para MULLER (1997), o reconhecimento de padrões é a área de pesquisa que tem por alvo identificar e discriminar objetos (padrões) em certo número de categorias ou classes. Algumas das aplicações são:

- Reconhecimento de padrões em imagens digitais;
- Análise do desempenho empresarial;
- Concessão de crédito;
- Diagnóstico médico preliminar;
- Elaboração de perfis de consumidores;
- Processamento de sinais;
- Reconhecimento de fala e de rosto;
- Inspeção visual para automação industrial.

Em geral, deseja-se que um problema de reconhecimento de padrões bem definido e restrito possua pequenas variações dentro da mesma categoria e grandes variações entre as diferentes categorias.

Segundo STEINER (1995), inúmeros trabalhos têm se detido ao reconhecimento de padrões com o objetivo de discriminar e alocar novas observações, citando seis métodos:

Dois envolvendo a técnica da Programação Linear:

1. Geração de uma superfície linear por partes;
2. Geração de uma superfície que minimiza os erros;

Três métodos estatísticos:

3. Função Discriminante Linear de Fisher;
4. K'-Vizinhos mais próximos, segundo a distância de Mahalanobis e outras;
5. Modelo de Regressão Logística;

E um último método envolvendo redes neurais:

6. Geração de uma superfície linear por partes utilizando o algoritmo *Back-propagation*.

Os casos da Função Discriminante Linear de Fisher e o Modelo de Regressão Logística serão descritos a seguir. Há também diversas outras técnicas de mineração de dados utilizados para o reconhecimento de padrões, dos quais se pode destacar Árvores de Decisão, *Naive Bayes*, *Support Vector Machines* (SVM) e outros. As Árvores de Decisão serão descritas no tópico 2.6

#### 2.2.8 Análise Discriminante – Método de Fisher

As técnicas estatísticas multivariadas que compõem a Análise Discriminante se referem à solução de problemas de classificação de novos objetos em conjuntos previamente definidos e têm o objetivo específico de utilizar as diversas variáveis na composição de funções discriminantes que classificarão novos objetos no conjunto (grupo) mais adequado. Esta técnica está inserida em um contexto mais amplo, que é o do reconhecimento de padrões, desta forma, o objetivo é construir uma regra de reconhecimento e classificação. Por outro lado os métodos de reconhecimento e classificação de padrões estão incorporados em um contexto mais amplo, ou seja, o da inteligência artificial.

Segundo JOHNSON e WICHERN (1998) a Análise Discriminante e de Classificação são técnicas multivariadas usadas na separação de uma coleção de

objetos distintos e na alocação de novos objetos em grupos previamente definidos.

Essas técnicas apesar de estarem interligadas não devem ser confundidas. A Análise Discriminante se refere aos métodos de atribuição de categorias a determinados conjuntos de dados. Como separar a rentabilidade de empresas em duas categorias (acima ou abaixo da rentabilidade de mercado) diferenciadas pela Função Discriminante Linear de Fisher (FDLF) ou pelo Modelo de Regressão Logístico Múltiplo (MRLM), por exemplo. Enquanto a classificação se refere à alocação de novas observações em determinada categoria.

As discriminações podem ser feitas através de processos supervisionados que são utilizados quando se conhece os padrões, ou através de processos não-supervisionados quando não se tem um padrão reconhecido. Os métodos FDLF e MRLM são métodos supervisionados e de concepção estatística enquanto a Análise de Agrupamentos (*Clusters*) é um método não-supervisionado.

Na Análise Discriminante, as categorias definidas (duas no caso deste trabalho) são denominadas por  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Os objetos são separados ou classificados usando a base de suas medidas associadas a  $p$  variáveis aleatórias. O método de Fisher consiste em transformar as observações multivariadas  $\underline{X}$  nas observações univariadas  $Y$  tal que os  $Y$ 's nas populações  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sejam separadas tanto quanto possível.

Isso é feito através de combinações lineares dos  $\underline{X}$  criando os  $Y$ 's, tendo em vista que combinações lineares são funções de  $\underline{X}$  e por outro lado são de fácil cálculo. Portanto, seja  $\mu_{1Y}$  a média dos  $Y$ 's obtidos dos  $\underline{X}$ 's pertencentes à população  $\pi_1$  e  $\mu_{2Y}$  a média dos  $Y$ 's obtidos dos  $\underline{X}$ 's pertencentes a  $\pi_2$ , então se seleciona a combinação linear que maximiza a distância quadrática entre  $\mu_{1Y}$  e  $\mu_{2Y}$  relativamente à variabilidade dos  $Y$ 's (GUIMARÃES, 2000). Portanto, seja:

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_1 &= E(\underline{X}|\pi_1): \text{valor esperado de uma observação multivariada de } \pi_1 \\ \underline{\mu}_2 &= E(\underline{X}|\pi_2): \text{valor esperado de uma observação multivariada de } \pi_2\end{aligned}\quad (2.62)$$

e supondo a matriz de covariância

$$\Sigma = E[(X - \mu_i)(X - \mu_i)'] , \quad i = 1, 2 \quad (2.63)$$

como sendo a mesma para ambas as populações, então considerando a combinação linear  $Y = \underline{C}' \underline{X}$  tem-se

$$\mu_{1Y} = E(Y|\pi_1) = E(\underline{C}' \underline{X}|\pi_1) = \underline{C}' E(\underline{X}|\pi_1) = \underline{C}' \underline{\mu}_1, \quad (2.64)$$

da mesma forma

$$\mu_{2Y} = E(Y|\pi_2) = E(\underline{C}' \underline{X}|\pi_2) = \underline{C}' E(\underline{X}|\pi_2) = \underline{C}' \underline{\mu}_2 \quad (2.65)$$

e

$$\sigma_Y^2 = V(Y) = V(\underline{C}' \underline{X}) = \underline{C}' V(\underline{X}) \underline{C} = \underline{C}' \Sigma \underline{C}, \quad (2.66)$$

que é a mesma para as duas populações.

Segundo esse método, a melhor combinação linear vem da razão entre o quadrado da distância entre as médias e a variância de Y, ou seja,

$$\frac{(\mu_{1Y} - \mu_{2Y})^2}{\sigma_Y^2} = \frac{(\underline{C}' \underline{\mu}_1 - \underline{C}' \underline{\mu}_2)^2}{\underline{C}' \Sigma \underline{C}} = \frac{(\underline{C}' \underline{\delta})^2}{\underline{C}' \Sigma \underline{C}} \quad (2.67)$$

onde:  $\underline{\delta} = \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2$  e  $V(\underline{X}) = \Sigma$

A razão (2.67) é maximizada por considerar que a matriz de covariância é positiva definida, e então a demonstração é feita aplicando o lema de maximização baseado nas desigualdades de Cauchy-Schwarz<sup>5</sup>, resultando em  $\underline{C} = K \Sigma^{-1} \underline{\delta} = K \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)$  para qualquer  $K \neq 0$  (JOHNSON; WICHERN, 1998).

Escolhendo-se  $K = 1$  tem-se  $\underline{C} = \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)$  e

$$Y = \underline{C}' \underline{X} = (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} \underline{X} \quad (2.68)$$

que é conhecida como Função Discriminante Linear de Fisher (FDLF).

A FDLF transforma as populações multivariadas  $\pi_1$  e  $\pi_2$  em populações univariadas tais que as médias das populações univariadas são separadas tanto quanto possível relativamente à variância populacional considerada comum.

Toma-se

$$Y_0 = (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} \underline{X}_0 \quad (2.69)$$

---

<sup>5</sup> A desigualdade de Cauchy-Schwarz será retomada no tópico 2.6 ao se tratar da Entropia de Rényi e Informação Mútua. Ela é apresentada e deduzida no Apêndice 3.

como valor da FDLF para uma nova observação  $\underline{\mathbf{X}}_0$  e consideramos o ponto médio  $m$  entre as duas populações univariadas

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}(\mu_{1Y} + \mu_{2Y}) = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}}' \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \underline{\mathbf{C}}' \underline{\boldsymbol{\mu}}_2) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{C}}' (\underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mu}}_2) \\ &= \frac{1}{2}[(\underline{\boldsymbol{\mu}}_1 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_2)' \Sigma^{-1} (\underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mu}}_2)] \end{aligned} \quad (2.70)$$

E ainda pode-se mostrar que  $E(Y_0/\pi_1) - m \geq 0$  e  $E(Y_0/\pi_2) - m < 0$ . Ou seja, se  $\underline{\mathbf{X}}_0 \in \pi_1$ , é esperado que  $Y_0 \geq m$ . Por outro lado se  $\underline{\mathbf{X}}_0 \in \pi_2$ , é esperado que  $Y_0 < m$ . Desta forma tem-se a Regra de Classificação:

- Alocar  $\underline{\mathbf{X}}_0$  em  $\pi_1$  se  $Y_0 \geq m$
- Alocar  $\underline{\mathbf{X}}_0$  em  $\pi_2$  se  $Y_0 < m$

Como se trabalha com amostras, alguns parâmetros devem ser estimados, de forma que a FDLF será estimada por:

$$\hat{Y} = \hat{\underline{\mathbf{C}}} \hat{\underline{\mathbf{X}}} = (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2)' \mathbf{S}_p^{-1} \underline{\mathbf{X}} \quad (2.71)$$

sendo o ponto médio  $m$  estimado por

$$\hat{m} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2)' \mathbf{S}_p^{-1} (\underline{\mathbf{X}}_1 + \underline{\mathbf{X}}_2) = \frac{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}{2} \quad (2.72)$$

Onde  $\bar{\underline{\mathbf{X}}}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{X}_{i1}$  estima  $\underline{\boldsymbol{\mu}}_1$ ,  $\bar{\underline{\mathbf{X}}}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{X}_{i2}$  estima  $\underline{\boldsymbol{\mu}}_2$  e  $\mathbf{S}_p = \frac{(n_1-1)\mathbf{S}_1 + (n_2-1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2}$

estima  $\Sigma$ .

Com  $\mathbf{S}_1 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (\mathbf{X}_{i1} - \bar{\underline{\mathbf{X}}}_1)(\mathbf{X}_{i1} - \bar{\underline{\mathbf{X}}}_1)'$  e  $\mathbf{S}_2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (\mathbf{X}_{i2} - \bar{\underline{\mathbf{X}}}_2)(\mathbf{X}_{i2} - \bar{\underline{\mathbf{X}}}_2)'$ , a regra de

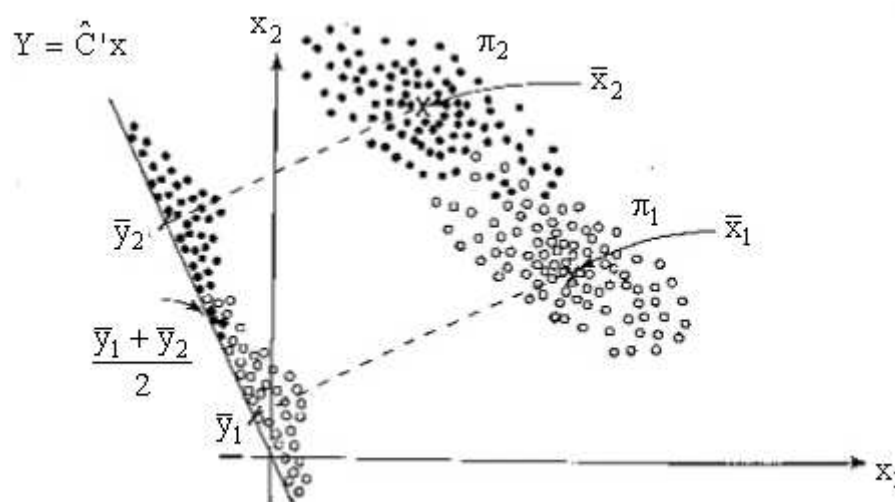
alocação baseada na FDLF estimada fica:

- Alocar  $\underline{\mathbf{X}}_0$  em  $\pi_1$  se  $\hat{Y}_0 \geq \hat{m}$
- Alocar  $\underline{\mathbf{X}}_0$  em  $\pi_2$  se  $\hat{Y}_0 < \hat{m}$

Uma vantagem desse método é não necessitar da suposição de que as populações sejam distribuídas normalmente, entretanto, é assumido que as matrizes de covariância populacional  $\Sigma$  seja a mesma para os dois grupos.

A representação geométrica do procedimento de Fisher para duas populações, considerando apenas duas variáveis, é a seguinte:

FIGURA 2.8 – REPRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE FISHER PARA DUAS POPULAÇÕES



Os pontos do gráfico são projetados sobre uma reta na direção de  $C$  e esta direção é variada até que haja uma máxima separação da amostra. Entretanto, uma separação significativa não necessariamente implica um bom classificador. A avaliação da eficiência de um modelo de discriminação pode ser avaliada independente de testes de separação e é visto no item 2.6. Por outro lado, se a separação não for significativa, a busca por uma regra útil de classificação provavelmente se mostrará infrutífera.

Uma maneira de construir modelos cuja variabilidade seja mais bem explicada, ao mesmo tempo em que pode maximizar a diferença entre os grupos, é o método *stepwise* (por etapas). Esse método sequência busca estimar a função discriminante selecionando variáveis para serem acrescentadas (*forward stepwise*) ou eliminadas (*backward stepwise*) do modelo até que alguma medida de critério geral seja alcançada. Este tem por objetivo selecionar variáveis que maximiza a previsão



com o menor número de variáveis empregadas. Com isso, se pode identificar as variáveis estatisticamente mais significantes para compor a função discriminante, uma vez somente variáveis que aumentem significativamente a capacidade discriminativa do modelo são adicionadas no método *forward*. De maneira análoga, uma variável presente na função discriminante é removida se a capacidade do modelo não for significativamente reduzida pela remoção dessa variável no método *backward*.

Uma das estatísticas mais utilizadas para denotar a significância estatística do poder discriminatório de uma função discriminante é o lambda de Wilks. Ele é um dos critérios baseados na Análise de Variância Multivariada (MANOVA) para avaliar diferenças multivariadas entre grupos (HAIR, ANDERSON, TATHAM; 1987). Sua formulação é:

$$\Lambda = \frac{\det({}_pA_p)}{\det({}_pA_p + {}_pB_p)} = \frac{1}{\det(I + A^{-1}B)} \quad (2.73)$$

onde  ${}_pA_p$  é a matriz de dispersão multivariada dentro do grupo (no caso geral, com distribuição  $W_p(\Sigma, m)$ ;  $m > p$ ) e  ${}_pB_p$  a matriz de dispersão multivariada entre grupos (no caso geral, com distribuição  $W_p(\Sigma, n)$ ).

Sendo  $\lambda$  um autovalor da matriz  $A^{-1}B$ , então  $1 + \lambda$  é um valor próprio  $I + A^{-1}B$ :

$$(I + A^{-1}B)x = x + A^{-1}Bx = x + \lambda x = (1 + \lambda)x. \quad (2.74)$$

Logo, o Lambda de Wilks pode ser escrito como:

$$\Lambda = \frac{1}{\det(I + A^{-1}B)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^p (1 + \lambda_i)} \sim \Lambda(p, m, n) \quad (2.75)$$

onde os  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A^{-1}B$ ;  $p$  é a dimensão;  $m$  são os graus de liberdade dos resíduos e  $n$  os graus de liberdade da hipótese para o contexto apresentado.

A distribuição exata do Lambda de Wilks não é conhecida, entretanto, se tem várias aproximações à distribuição (MARDIA, KENT, BIBBY; 1979). Para  $n = 2$  e  $p > 2$ :

$$\frac{1 - \Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}} \cdot \frac{as - \frac{pn}{2} + 1}{pn} \sim F\left(pn, as - \frac{pn}{2} + 1\right) \quad (2.76)$$

$$\text{com } a = m - \frac{p - n + 1}{2} \text{ e } s = \sqrt{\frac{p^2 n - 4}{p^2 + n^2 - 5}}.$$

### 2.2.9 Regressão Logística

Os Métodos de Regressão têm com objetivo principal descrever a relação entre uma variável resposta (dependente) e uma ou mais variáveis explicativas (independentes). O que distingue o modelo de regressão logística do modelo de regressão linear é que a variável resposta no primeiro caso é binária ou dicotômica (GUIMARÃES, 2000).

O modelo de regressão linear é do tipo

$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 X \quad (2.77)$$

sendo que essa expressão implica que é possível para a esperança tomar qualquer valor entre  $-\infty$  e  $\infty$ .

Considerando dados dicotômicos a média condicional varia de 0 a 1, ou seja,  $0 \leq E(Y|x) \leq 1$ , a distribuição acumulada de uma variável aleatória pode ser usada para proporcionar um modelo para  $E(Y|x)$  no caso que  $Y$  é dicotômica, é o caso da Regressão Logística.

Do ponto de vista matemático a Regressão Logística é flexível de fácil aplicação, além de proporcionar interpretações significativas (JOHNSON; WICHERN, 1998).

Usando a notação  $\pi(x) = E(Y|x)$ , o modelo de regressão logística aqui adotado é

$$E(Y|x) = \pi(x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}} \quad (2.78)$$

Com a transformação logit

$$\ln \pi(x) = \ln \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}} \quad (2.79)$$

pode ser colocada na forma

$$g(x) = \ln \left[ \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)} \right] = \beta_0 + \beta_1 x \quad (2.80)$$

A importância dessa transformação é que  $g(x)$  tem diversas propriedades desejáveis do modelo de regressão linear, pois a logit  $g(x)$  é linear nos seus parâmetros. Porém existem diferenças em relação ao modelo de regressão linear, como a média condicional da equação de regressão que deve variar entre 0 e 1 e a distribuição dos erros que possui distribuição binomial com média zero e variância igual a  $\pi(x)[1 - \pi(x)]$ .

Assim, a Regressão Logística é uma técnica de análise que relaciona variáveis independentes, as quais podem ser métricas ou não métricas, a uma variável dependente binária. FÁVERO *et al* (2009, p. 13) afirmam que a previsão resultante é um valor entre zero e um ou, de outra forma, a probabilidade de obtenção do valor um, sendo, portanto, uma técnica “[...] útil para aferição da probabilidade de ocorrência de um evento e para identificação das características dos elementos pertencentes a cada categoria estabelecida pela dicotomia da variável dependente”.

Esse desenvolvimento pode ser estendido para diversas variáveis independentes, de forma que o modelo de regressão logística múltipla a ser utilizado é expresso por:

$$\pi(x) = \frac{e^{g(x)}}{1 + e^{g(x)}} \quad (2.81)$$

onde:  $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p$  (HOSMER; LEMESHOW, 1989; JOHNSON; WICHERN, 1998)

Da mesma forma que na Análise Discriminante via Função Linear Discriminante de Fisher, o métodos *stepwise* também pode ser empregado, tendo como estatística avaliadora o Lambda de Wilks, de modo a reduzir o número de variáveis

incorporadas ao modelo.

Diferentemente do que ocorre com a Regressão Linear, a determinação exata dos parâmetros na Regressão Logística não é possível, sendo que as soluções dos sistemas não-lineares de equações para estimação dos  $\hat{\beta}$ 's requerem a utilização de métodos iterativos na busca desses parâmetros.

Entretanto, considerando que o problema de estimação dos parâmetros pode ser entendido como um problema de minimização, pode-se considerar a utilização de algum método de minimização para esse fim.

A estimação dos parâmetros para ajuste ao modelo de regressão logística é comumente efetuado pelo Método Quase-Newton, pelo Método da Função Discriminante ou pelo Modelo de Locação de Variáveis Mistas. A opção adotada, por eficiência na estimação e facilidades computacionais foi a do Método Quase-Newton.

## 2.3 TEORIA DA INFORMAÇÃO

Claude E. SHANNON (1948) foi um pioneiro ao considerar a comunicação como um problema matemático rigorosamente embasado na estatística, criando um ramo da teoria da probabilidade e da estatística chamado Teoria da Informação. Apesar de ser originalmente desenvolvida para informações perdidas na compressão e transmissão de mensagens com ruídos em um canal de comunicação, sua aplicabilidade se expandiu para outros domínios da engenharia, informática, estatística e economia.

Na área de reconhecimento de padrões, o interesse se volta para a Teoria da Informação pela sua capacidade de identificação de variáveis relevantes e utilização em métodos classificatórios. Isso se dá, a princípio, por meio de dois conceitos nomeados por Shannon: entropia e informação mútua. Nesse contexto, a entropia funciona como uma medida de incerteza de variáveis aleatórias isoladas ou

combinadas. A informação mútua refere-se à dependência estocástica entre variáveis aleatórias, quantificando a informação comum entre elas (GONÇALVES, 2008).

### 2.3.1 Origem da entropia

A entropia é um termo que originalmente se refere a um conceito físico termodinâmico. Num primeiro momento, remete aos trabalhos do físico alemão Rudolf Clausius na segunda metade do século XIX. Em termos modernos, a entropia ( $S$ ), como desenvolvida por Clausius, é uma função de estado relacionada com a passagem de calor ( $Q$ ) e a temperatura ( $T$ ), sendo expressa por:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (2.82)$$

A opção pelo nome entropia, que anteriormente havia sido chamada de “calor perdido irreversivelmente” e “valor equivalente”, se deve a origem grega da palavra e sua similaridade com energia. Mesmo não se referindo à mesma ideia, as duas estão profundamente relacionadas, de forma que Clausius achou ser apropriado ter também certa similaridade nos nomes (LAIDER, 1995).

Em 1862, Clausius enunciou o teorema que diz que a soma algébrica de todas as variações de entropia das transformações ocorridas em um processo cíclico é sempre positiva ou, em processos reversíveis, nula. Ou seja,  $\Delta S \geq 0$ , que corresponde à 2ª Lei da Termodinâmica.

Com base nos trabalhos de Clausius, Von Helmholtz e outros, o físico estadunidense Josiah Williard Gibbs propôs, em 1876, uma medida de “energia disponível” ( $\Delta G$  – *free energy*) que seria matematicamente calculada subtraindo-se a “energia perdida”  $T\Delta S$  da energia total  $\Delta H$ . Isso implica que a energia disponível do Universo se reduz, visto que a variação de entropia é positiva ou, em casos extremos, nula.

Em 1877, uma definição alternativa de entropia, mas equivalente à anterior, foi formulada pelo austríaco Ludwig Boltzmann, definindo-a usualmente como

$$S = k_B \log \Omega \quad (2.83)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $\Omega$  é o número de microestados que geram o macroestado observado.

Para compreender mais profundamente a relação da eq. 2.83 com probabilidades, cabe fazer um breve desenvolvimento da expressão. Primeiro, é preciso esclarecer alguns conceitos. Um macroestado é dado em função de propriedades macroscópicas da matéria (como pressão, temperatura e volume). Um microestado  $X$  é especificado por meio das 3 coordenadas de posição e das 3 coordenadas de momento de cada partícula  $N$  (indistinguível) que compõe o sistema estudado. O espaço de fase  $W$  é o espaço de  $6N$  dimensões de todas as possibilidades de microestados e  $W_E$  é a região de  $W$  que consiste em todos os microestados com energia constante  $E$ .

Particionando o espaço de fase  $W_E$  em células  $\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_k$  de tamanho  $(\delta\omega)^N$ , há uma distribuição de partículas, dada pela quantidade delas em cada célula. Mas diversas formas de arranjar as partículas nas células podem corresponder a mesma distribuição  $D$ , uma vez que as partículas são indistinguíveis. A quantidade de arranjos  $G(D_i)$  compatíveis com a distribuição  $D_i$  é dada por

$$G(D_i) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (2.84)$$

onde  $n_1, n_2, \dots, n_k$  são o número de partículas presentes nas células  $\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_k$ .

Cada distribuição  $D_i$  corresponde a um macroestado  $\Omega_{D_i}$ , cujo tamanho pode ser dado pelo número de arranjos compatíveis com  $D_i$  multiplicado pelo tamanho da célula correspondente, ou seja:

$$\Omega_{D_i} = G(D_i) \cdot \delta\omega^N \quad (2.85)$$

e da entropia de Boltzmann:

$$\begin{aligned}
S(\Omega_{D_i}) &= k_B \log(G(D_i) \delta \omega^N) \\
S(\Omega_{D_i}) &= k_B \log(G(D_i)) + k_B \log(\delta \omega^N) \\
S(\Omega_{D_i}) &= k_B \log\left(\frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!}\right) + N \log(\delta \omega) \\
S(\Omega_{D_i}) &= k_B \log(N!) - k_B \log(n_1!) - \dots - k_B \log(n_k!) + \text{const}
\end{aligned}$$

usando a aproximação de Stirling  $\log n! \cong n \log(n) - n$  e o fato de que  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ :

$$\begin{aligned}
S(\Omega_{D_i}) &\cong (N k_B \log(N) - N) - (n_1 k_B \log(n_1) - n_1) - \dots - (n_k k_B \log(n_k) - n_k) + \text{const} \\
S(\Omega_{D_i}) &\cong -k_B \sum_i n_i \log(n_i) + \text{const} \tag{2.86}
\end{aligned}$$

chamando de  $p_j = n_j/N$  a probabilidade de encontrar aleatoriamente o microestado  $j$  na célula  $\omega_i$ :

$$S(\Omega_{D_i}) = -N k_B \sum_j p_j \log(p_j) + \text{const} \tag{2.87}$$

fazendo a constante nula, tem-se, usualmente, a entropia  $S$  para a distribuição  $D_i$ . Nessa equação, nota-se que a entropia é maximizada quando todos os  $p_i$ 's são iguais a  $1/N$ . A expressão  $p \log p$  é considerada, por convenção, igual a zero quando  $p = 0$ . Isso se justifica porque  $\lim_{p \rightarrow 0^+} (p \log p) = 0$ .

Esse desenvolvimento foi ainda mais refinado por Gibbs. Para Boltzmann, cada ponto do espaço de fase  $W$  representava um possível estado do sistema. Gibbs estende esse entendimento para um possível estado de um membro de um *ensemble*<sup>6</sup>, cujo estado é dado por uma função densidade de probabilidade  $\rho(x,t)$ . Dessa forma, a entropia passa a ser calculada por:

$$S(\rho) = -k_B \int_W \rho(x,t) \log(\rho(x,t)) dx \tag{2.88}$$

Na mecânica estatística quântica, o conceito de entropia foi desenvolvido pelo húngaro-estadunidense John von Neumann, mas se mantém a mesma estrutura do caso

---

<sup>6</sup> Conjunto de vários sistemas idênticos a um sistema estatisticamente considerado.

clássico. Apenas  $\rho$  é dado por uma matriz densidade e utiliza-se o operador traço da matriz como substituto ao somatório:

$$S = -k_B \text{Tr}(\rho \log \rho) \quad (2.89)$$

### 2.3.2 Entropia de Shannon e relação com o conceito físico de entropia

Trabalhando nos laboratórios da Bell Telephone, Shannon desenvolveu uma medida matemática para quantificar a perda de sinal nas linhas telefônicas. Antes dele, em estudos técnicos sobre a transmissão de dados em telégrafos, HARTLEY (1928) havia proposto a quantidade  $Q(p_i) = -\log p_i$  como uma medida para o cálculo de pulsos transmitidos nas bandas de comunicação (GRAY, 2009). Em termos mais adequados para os interesses dessa tese, é uma medida da informação produzida pela ocorrência de um evento de probabilidade  $p$ . Baseado nesse resultado, SHANNON (1948) propõe a seguinte medida para quantificar a incerteza de uma transmissão, que foi conhecida como entropia de Shannon:

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (2.90)$$

Dessa forma, sua entropia é uma média aritmética ponderada da informação de Hartley que assume as seguintes propriedades:

- 1) É contínua em  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- 2) Se  $p_i = 1/n$ , então a entropia é uma função monótona crescente em  $n$ ;
- 3) A entropia é maximizada numa distribuição uniforme;
- 4) A entropia de um conjunto é aditiva (igual à soma da entropia dos subconjuntos);
- 5) A entropia é uma função de estado, isto é, dados os  $p_i$ 's entre os estados inicial e final, a entropia independe do caminho percorrido para atingir esses estados.

Ou, em sua forma contínua:



$$H = \int f_x \log f_x(x) dx \quad (2.91)$$

Originalmente, Shannon não chamou essa quantidade de entropia, mas de “informação faltante” (*missing information*). Segundo AVERY (2003, p. 81), a sugestão de chamá-la de entropia foi de von Neumann, que lhe disse: “Em primeiro lugar, um desenvolvimento matemático muito próximo já existe na mecânica estatística de Boltzmann e, em segundo lugar, ninguém entende muito bem o que é entropia, então, em qualquer discussão, você estará em posição de vantagem<sup>7</sup>”.

No âmbito da Teoria da Informação, a entropia quantifica a incerteza associada com o valor de uma variável aleatória. Nesse sentido, a entropia envolvida em um lance de dado, por exemplo, é maior do que a de um lance de moeda. Logo, conhecer o resultado de um lance de dado reduz mais a entropia (fornece um maior ganho de informação) do que conhecer o resultado de um lance de moeda.

Num sentido restrito/prático, não há muitas semelhanças entre a entropia de informação e a entropia termodinâmica. Físicos, químicos e pesquisadores da área estão interessados em estudar como um sistema evolui espontaneamente a partir de suas condições iniciais, estabelecendo sentidos de transformações de acordo com a 2ª Lei da Termodinâmica, assumindo que todos os microestados possuem a mesma probabilidade de ocorrer. Princípios e hipóteses decorrentes da entropia (aumento da entropia do Universo, sentido preferencial de processos, diminuição da energia disponível) não estão presentes na Teoria da Informação. Além disso, a Termodinâmica clássica define a entropia em termos macroscópicos, sem fazer qualquer referência a distribuições de probabilidade. Tampouco as escalas de valores de entropia de sistemas físico-químicos, mesmo quando suprimido o efeito da constante de Boltzmann, fazem sentido como entropia de informação e vice-versa.

---

<sup>7</sup> No original: “In the first place, a mathematical development very much like yours already exists in Boltzmann’s statistical mechanics, and in the second place, no one understands entropy very well, so in any discussion you will be in a position of advantage”.

Por outro lado, num nível multidisciplinar e num ponto de vista matemático-estatístico, algumas conexões podem ser feitas. A primeira é a clara semelhança das expressões e das consequências matemáticas derivadas disso, como suas propriedades. Ambas também estão relacionadas com o grau de incerteza de um sistema, com a entropia sendo máxima quando a desordem é máxima e uma diminuição da entropia implicando numa maior organização do objeto de estudo. JAYNES (1957) argumenta que a entropia da mecânica estatística pode, inclusive, ser vista como uma aplicação da teoria da informação de Shannon, sendo interpretada como proporcional à quantidade de informação necessária para definir o estado microscópico detalhado do sistema. Assim, a adição de calor a um sistema aumenta a sua entropia termodinâmica porque aumenta o número de possíveis estados microscópicos do sistema, tornando mais complexa qualquer descrição do estado.

Continuando com os desenvolvimentos da entropia de Shannon, chama-se a atenção para o fato de que a entropia  $H(X)$  não ser função da variável aleatória  $X$ , mas sim da distribuição de probabilidade dessa variável. Em outras palavras, não dependente dos valores que  $X$  assume, mas das suas probabilidades.

Assim, sejam  $X$  e  $Y$  dois eventos quaisquer e  $p(i, j)$  a probabilidade conjunta de ocorrência do primeiro e do segundo evento, então existe uma probabilidade condicional  $p(i | j)$ , onde  $Y$  assume o valor  $j$ , tal que

$$p(i | j) = \frac{p(i, j)}{p(j)} \quad (2.92)$$

Dado  $X$ , a entropia condicional de  $Y$  é:

$$H(Y | X) = -\sum_i p(i) \sum_j p(j | i) \log p(j | i) = -\sum_j \sum_i p(j, i) \log p(j | i) \quad (2.93)$$

onde foi usada a regra da cadeia  $p(i, j) = p(i) \cdot p(j | i)$  e a partir da qual, com a eq. 2.92, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\sum_j \sum_i p(j,i) \log \left( \frac{p(j,i)}{p(i)} \right) \\
H(Y|X) &= -\sum_j \sum_i p(j,i) \log p(j,i) + \sum_j \sum_i p(j,i) \log p(i) \\
H(Y|X) &= -\sum_j \sum_i p(j,i) \log p(j,i) + \sum_i p(i) \log p(i) \\
H(Y|X) &= H(X,Y) - H(X)
\end{aligned} \tag{2.94}$$

onde  $H(X, Y) = H(Y, X)$  é a entropia conjunta dos eventos  $X$  e  $Y$ .

Como  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ , tem-se  $H(Y|X) \leq H(Y)$ , com igualdade apenas se  $X$  e  $Y$  forem independentes. O que se justifica pelo fato da entropia diminuir com o conhecimento de  $X$ , pois diminui a incerteza que existe relativamente a  $Y$ , a menos que as variáveis  $X$  e  $Y$  sejam independentes. Nesse caso, qualquer informação sobre  $X$  não diminui a entropia de  $Y$ .

Caso  $X$  possa diminuir o grau de incerteza sobre  $Y$ , pode-se considerar tal diminuição como um ganho de informação, representado pela informação mútua  $I(Y,X)$ :

$$I(Y, X) = H(Y) - H(Y|X) \tag{2.95}$$

de onde, usando a eq. 2.94, deduz-se que

$$\begin{aligned}
I(Y, X) &= H(Y) - [H(X, Y) - H(X)] \\
I(Y, X) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y)
\end{aligned} \tag{2.96}$$

e, ainda,

$$I(Y, X) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) = I(X, Y) \tag{2.97}$$

dessa relação, e partindo-se da eq. 2.96, pode-se definir a informação mútua como:

$$I(X, Y) = -\sum_i p(i) \log p(i) - \sum_j p(j) \log p(j) + \sum_i \sum_j p(i, j) \log p(i, j)$$

$$I(X, Y) = \sum_i \sum_j p(i, j) \log \left( \frac{p(i, j)}{p(i) \cdot p(j)} \right) \quad (2.98)$$

$$I(X, Y) = E \left[ \log \left( \frac{p(i, j)}{p(i) \cdot p(j)} \right) \right] \quad (2.99)$$

Pela equação 2.98, observa-se que a informação mútua é uma medida de independência estatística, que quanto maior for, mais relacionada eram as variáveis (COVER e THOMAS, 1991).

Para o caso contínuo, a informação mútua passa a ser dada por

$$I(X, Y) = \int_Y \int_X f(x, y) \log \left( \frac{f_{xy}(x, y)}{f_x(x) \cdot f_y(y)} \right) dx dy \quad (2.100)$$

A informação mútua está relacionada com a divergência de Kullback-Leibler, uma medida de similaridade entre funções estritamente positivas muito utilizada para se comparar duas funções, definida por:

$$D_{KL} = \int_X f(x) \log \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) dx = E_f \left[ \log \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right] \quad (2.101)$$

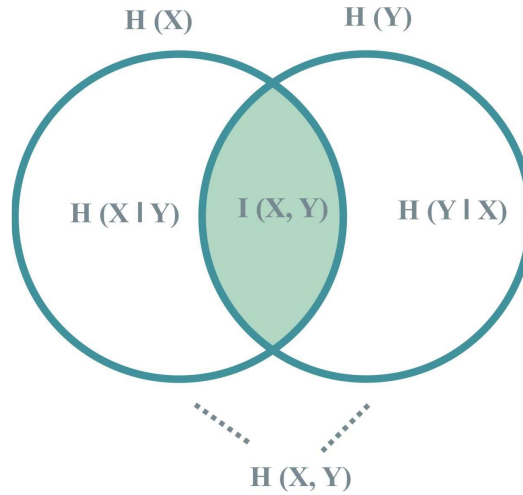
A divergência de Kullback-Leibler é não negativa e frequentemente referida como uma distância entre as distribuições  $f(x)$  e  $g(x)$ , ainda que não seja de fato uma métrica por não ser simétrica nem satisfazer a desigualdade triangular.

Com a eq. 2.100, a informação mútua pode ser escrita como

$$I(X, Y) = D_{KL} (f_{XY}(x, y); f_X(x)f_Y(y)) \geq 0 \quad (2.102)$$

A Figura 2.9 esclarece as relações existentes entre entropia, entropia condicional e informação mútua por meio de um diagrama de Venn.

FIGURA 2.9 – RELAÇÃO ENTRE ENTROPIA, ENTROPIA CONDICIONAL E INFORMAÇÃO MÚTUA



Com a aplicação do método de histograma, utilizando o histograma de frequências relativas (SCOTT, 1992) com a discretização das variáveis contínuas, a entropia e a Informação Mútua de Shannon podem ser estimadas por:

$$\hat{H}(X) = -\sum_{i=1}^N \hat{f}_x(x_i) \log \hat{f}_x(x_i) \quad (2.103)$$

$$\hat{I}(X, Y) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{f}_{xy}(x_i, y_j) \log \frac{\hat{f}_{xy}(x_i, y_j)}{\hat{f}_x(x_i) \hat{f}_y(y_j)} \quad (2.104)$$

### 2.3.3 Entropia de Rényi

A partir da equação funcional de Cauchy  $f(xy) = f(x) + f(y)$ , RÉNYI (1961) buscou uma definição geral para medidas de informação que preservassem a aditividade de eventos independentes e fosse compatível com os axiomas da probabilidade.

A menos de uma constante de normalização, tal solução é compatível com a informação de HARTLEY (1928)  $Q(p_i) = -\log p_i$ . Se fosse assumido que os eventos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pudessem ter diferentes probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$  e cada qual possuísse uma informação  $H_i$ , a quantidade total de informação seria dada por

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i Q(p_i) \quad (2.105)$$

que é entropia de Shannon (eq. 2.90). Mas há uma suposição implícita: é utilizada a média aritmética, que não é a única possível. Afinal, para uma função  $g(x)$  com inversa  $g^{-1}$ , a média pode ser computada como

$$g^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i g(x_i)\right) \quad (2.106)$$

Aplicando 2.106 na equação 2.105, tem-se:

$$H = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i g(Q_i)\right) \quad (2.107)$$

Ao se respeitar o postulado de aditividade de eventos independentes, somente duas alternativas são possíveis para  $g(x)$ :

$$g(x) = cx$$

$$g(x) = c^{-2(1-\alpha)x}$$

A primeira possibilidade fornece a entropia de Shannon, a segunda resulta em:

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log\left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha\right) \quad (2.108)$$

para  $\alpha \geq 0$  e  $\alpha \neq 1$ . Esse resultado engloba uma família de medidas de informação chamadas de entropia de Rényi. É possível demonstrar<sup>8</sup> que a entropia de Shannon é um caso particular da entropia de Rényi quando  $\alpha \rightarrow 1$ .

Ao se comparar as duas definições de entropia (eqs. 2.90 e 2.108), percebe-se que em Shannon  $\log(p_i)$  é ponderado pela probabilidade, enquanto em Rényi, o logaritmo é externo à soma e  $\alpha$  é a potência da função probabilidade. Fazendo

$$V_\alpha(X) = \sum_i p_i^\alpha:$$

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log(V_\alpha(X)) = -\log\left(\alpha^{-1} \sqrt[1-\alpha]{V_\alpha(X)}\right) = -\log\left(\alpha^{-1} \sqrt[1-\alpha]{E(V_{\alpha-1}(X))}\right) \quad (2.109)$$

de onde se nota que  $V_\alpha(X)$  é o argumento da  $\alpha$ -norma da função probabilidade. Numa visão geométrica, as funções probabilidades compõem um espaço de  $n$  dimensões e a

---

<sup>8</sup> Essa demonstração é feita no Apêndice 3

distância entre a origem e um ponto  $p$  ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) é medido pela  $\alpha$ -norma, sendo  $\alpha = 2$  a norma euclidiana (PRINCIPE, 2010).

Utilizando-se  $\alpha = 2$ , tem-se a entropia quadrática de Rényi:

$$H_2 = \log \left( \sum_{i=1}^n p_i^2 \right) \quad (2.110)$$

Essa escolha faz com que o argumento do logaritmo tenha um sentido próprio, afinal ele é  $E[p(X)]$ . Ou, de maneira alternativa, ao se fazer a mudança de variável  $\varepsilon_i = p(x_i)$ , o argumento é a média da variável transformada, enquanto a função probabilidade é a transformação. A entropia quadrática de Rényi é particularmente interessante por ser facilmente estimada a partir de dados amostrais.

É possível mostrar que a medida de entropia de Rényi pode ser estendida para variáveis aleatórias contínuas (GONÇALVES, 2008), porém sem a condição da entropia ser não negativa, e se torna:

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \int f^\alpha(x) dx \quad (2.111)$$

Para estimar a entropia quadrática de Rényi é possível utilizar a janela de Parzen. Para isso, atribui-se um *kernel* sobre os dados da amostra e os soma com uma normalização adequada. Uma possibilidade é:

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{N\sigma} \sum_{i=1}^N \kappa \left( \frac{x - x_i}{\sigma} \right) \quad (2.112)$$

PARZEN (1962) provou que esse estimador é assintoticamente não-viesado e consistente. O parâmetro  $\sigma$  é chamado de tamanho do *kernel*. Normalmente se utiliza uma gaussiana e  $\sigma$  se torna o desvio padrão. Desse modo, para a entropia quadrática utilizando um *kernel* gaussiano:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2(X) &= -\log \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_{\sigma}(x - x_i) \right)^2 dx \\
\hat{H}_2(X) &= -\log \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{\sigma}(x - x_j) \cdot G_{\sigma}(x - x_i) dx \\
\hat{H}_2(X) &= -\log \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma}(x - x_j) \cdot G_{\sigma}(x - x_i) dx \\
\hat{H}_2(X) &= -\log \left( \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{\sigma\sqrt{2}}(x_j - x_i) \right) \tag{2.113}
\end{aligned}$$

Com um *kernel* gaussiano, não é preciso calcular a integral explicitamente, uma vez que a integral de um produto de gaussianas é uma gaussiana com parâmetros modificados (um tamanho maior de *kernel*). O parâmetro  $\sigma$  deve ser selecionado pelo usuário, normalmente com base no método de *cross validation* ou pela regra de Silverman, (JENSSEN *et al*, 2006):

$$\sigma_{\text{opt}} = \sigma_X \left( 4N^{-1} (2d+1)^{-1} \right)^{\frac{1}{d+4}} \tag{2.114}$$

A princípio a informação mútua de Rényi não pode ser expressa em termos da entropia, como foi feito pela eq. 2.92 para a entropia de Shannon. No entanto, se for usada a divergência de Cauchy-Schwarz para se definir a informação mútua, é possível estabelecer uma relação (GONÇALVES, 2008).

A informação mútua quadrática pode ser obtida a partir da divergência de Cauchy-Schwarz. Partindo-se da desigualdade de Cauchy-Schwarz<sup>9</sup> para funções, a divergência é definida por:

$$D_{\text{CS}}(f, g) = -\log \frac{\int f(x)g(x)dx}{\sqrt{\int f^2(x)g^2(x)dx}} \tag{2.115}$$

A divergência  $D_{\text{CS}}$  é sempre simétrica e não negativa, sendo nula somente se  $f(x) = g(x)$ . Na prática, trabalha-se com o quadrado da razão acima, fazendo com que a divergência de Cauchy-Schwarz possa ser escrita como:

$$D_{\text{CS}}(f, g) = \log \left( \int f(x)^2 dx \right) + \log \left( \int g(x)^2 dx \right) - 2 \log \left( \int f(x)g(x) dx \right) \tag{2.116}$$

---

<sup>9</sup> Apresentada e deduzida no Apêndice 3



definindo-se a informação mútua quadrática por

$$I_{CS}(X, Y) = D_{CS}(f_{XY}(x, y); f_X(x)f_Y(y)) \quad (2.117)$$

e, em termos de entropia quadrática:

$$I_{CS}(X, Y) = H_2(f_{XY} \times f_X f_Y) - \frac{1}{2} H_2(f_{XY}) - \frac{1}{2} H_2(f_X f_Y) \quad (2.118)$$

A eq. 2.117 pode ser estimada, de maneira análoga ao que foi feito para o  $H_2(X)$ , por (PRINCIPE, 2010):

$$\hat{I}_{CS}(X, Y) = \log \frac{\left( \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{\sqrt{2}\sigma}(x(i) - x(j)) \cdot G_{\sqrt{2}\sigma}(y(i) - y(j)) \right) (\hat{V}_x \hat{V}_y)}{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^N G_{\sqrt{2}\sigma}(x(i) - x(j)) \right) \left( \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^N G_{\sqrt{2}\sigma}(y(i) - y(j)) \right) \right) \right)^2}$$

com  $\hat{V}_k = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{\sqrt{2}\sigma}(k(i) - k(j))$ , para  $k = x, y$  (2.119)

## 2.4 ÁRVORES DE DECISÃO

Árvores de decisão são modelos de mineração de dados cuja estrutura apresenta-se no formato de uma árvore. Cada nó interno da árvore indica um teste sobre um atributo, cada ramo representa um resultado do teste, e os nós terminais (folhas) correspondem a classes ou distribuições de classes. A profundidade de uma árvore é definida pela maior distância entre uma folha e a raiz (primeiro nó). Com isso, tem-se uma técnica que constrói regras de classificação passíveis de avaliação, interpretação e posterior aplicação. Por esses motivos, as árvores de decisão tornam-se interessantes para os problemas de reconhecimento de padrões. Segundo LEMOS (2003, p. 48):

Árvore de Decisão é um método adequado quando o objetivo do *Data Mining* é classificação de dados ou predição de saídas. É conveniente usar árvore de decisão quando o objetivo for categorizar dados de arquivos. Também é uma boa escolha quando o objetivo é gerar regras que podem ser facilmente entendidas, explicadas e

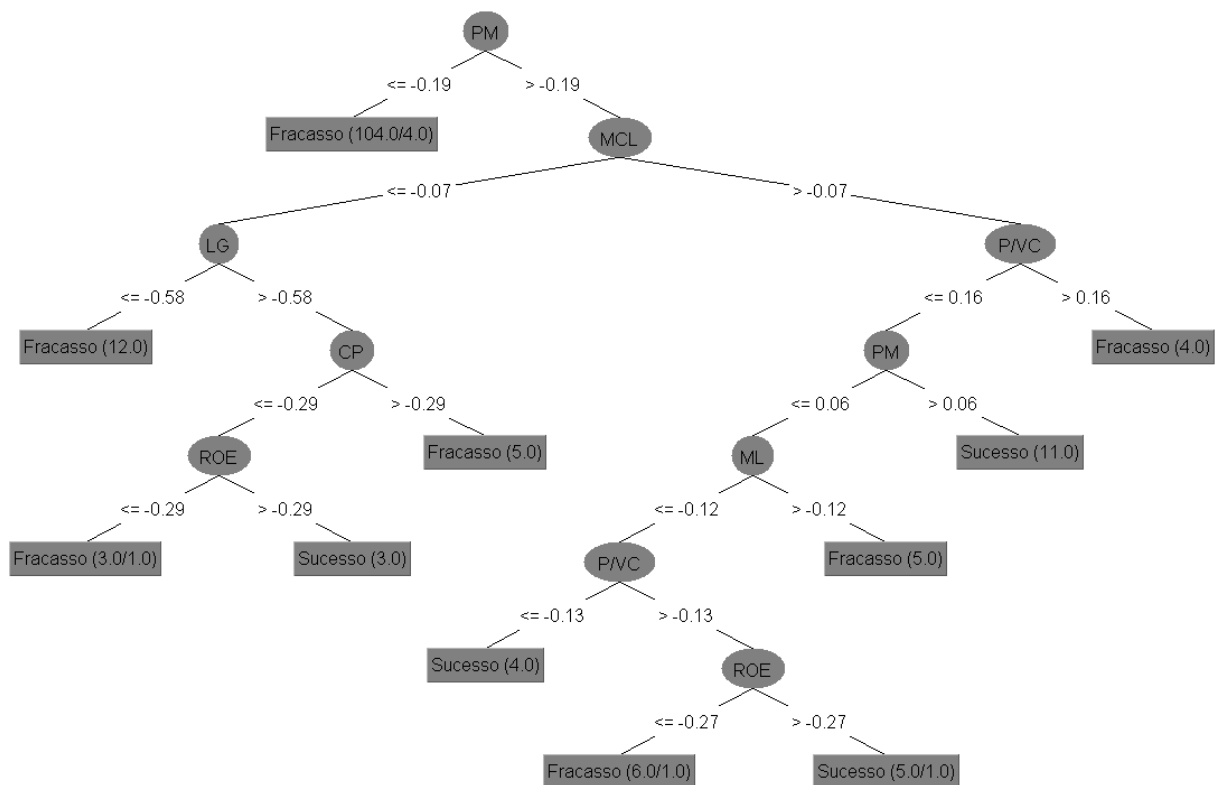
traduzidas para linguagem natural.

Algumas das vantagens apresentadas pelas árvores de decisão são sua flexibilidade, pois não assumem uma distribuição única dos dados, sendo métodos não-paramétricos; robustez, uma vez a seleção interna de características produz árvores que tendem a ser bastante robustas mesmo com a adição de variáveis irrelevantes; interpretabilidade, já que todas as decisões são baseadas nos valores (conhecidos) dos atributos usados para descrever o problema; e velocidade, pois a maioria dos algoritmos constrói rapidamente as árvores de decisão (GAMA, 1999).

Para o escopo dessa tese são de interesse as árvores de decisão binárias na qual cada nó divide-se em dois nós descendentes, um satisfazendo um teste lógico e o outro não. Logo, uma decisão é sempre interpretada como verdadeira ou falsa. Outras possibilidades podem ser encontradas em ZIGHED e RAKOTOMALALA (2000).

Em geral, o procedimento de uma árvore de decisão consiste em apresentar um conjunto de dados ao nó raiz da árvore e avaliá-lo segundo um teste lógico. Dependendo do resultado, a árvore ramifica-se para um dos nós descendentes e este procedimento é repetido até que uma folha conceda a classificação dos dados (SOBRAL, 2003). A figura 2.10 exemplifica a estrutura de uma árvore de decisão.

FIGURA 2.10 – EXEMPLO DE ÁRVORE DE DECISÃO



O aprendizado de uma árvore de decisão é normalmente supervisionado, ou seja, o método aproxima funções-alvo de valor discreto, na qual a função aprendida é representada por uma árvore de decisão. As árvores treinadas podem ser representadas como um conjunto de regras *if-then* para melhor compreensão e interpretação.

As árvores de decisão são construídas usando um algoritmo de partição recursiva. Uma das possibilidades é este algoritmo construir uma árvore por divisões recursivas binárias que começa no nó raiz e desce até os nós folhas. Nesse caso, têm-se dois fatores principais no algoritmo de partição: a forma de selecionar uma divisão para cada nó intermediário (crescimento) e uma regra para determinar quando um nó é terminal (poda).

A maioria dos algoritmos de construção (também chamados de indução) de árvores de decisão corresponde a um procedimento guloso<sup>10</sup> que recursivamente constrói a árvore do nó raiz em direção aos nós terminais. Em cada iteração, a partir da

<sup>10</sup> Técnica para problemas de otimização que sempre faz uma escolha ótima local com a intenção de atingir uma solução ótima global.

base de dados de treinamento, os algoritmos procuram pelo atributo que melhor separa as classes para realizarem a ramificação da árvore, e recursivamente processam os subproblemas resultantes das ramificações.

Essa abordagem de divisão e conquista adotada pelos algoritmos de indução de árvores de decisão foi desenvolvida e refinada ao longo de vários anos por John Ross Quinlan. Sua contribuição inicial foi o algoritmo ID3 (QUINLAN, 1986). Várias melhorias foram realizadas nesse algoritmo, culminando no surgimento do algoritmo C4.5 (QUINLAN, 1993), muito utilizado em aplicações práticas e pesquisas acadêmicas.

Em ambos, a escolha do atributo que geram as ramificações é feita a partir de uma medida conhecida como Ganho de Informação (equivalente a maior redução de entropia – informação mútua com a variável resposta). O atributo que proporcionar o maior ganho de informação (princípio da minimização da entropia) é selecionado como atributo teste do nó corrente. Originalmente, essa medida é baseada na entropia de Shannon (eq. 2.90). Procedendo-se dessa forma para a seleção de atributos constrói-se árvores mais simples e minimiza-se o número de testes necessários para a classificação (MERSCHMANN, 2007).

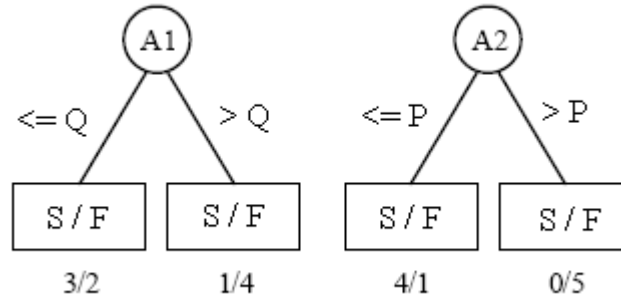
Para isso, compara-se a entropia da variável do nó imediatamente acima (nó-pai) com a entropia condicional da variável resposta (desfecho). O atributo que gerar uma maior diferença (maior redução da entropia/ganho de informação) é escolhido como condição de teste.

$$\text{Ganho de informação} = \text{entropia}(\text{nó-pai}) - \sum_{j=1}^n \frac{N(v_j)}{N} \text{entropia}(v_j) \quad (2.120)$$

onde  $n$  é o número de nós-filhos,  $N$  é o número total de objetos do nó-pai e  $N(v_j)$  é o número de observações associadas ao nó-filho. Essa medida corresponde à informação mútua entre os dados do atributo analisado e a variável resposta naquela iteração. Essa afirmação pode ser clarificada pelo exemplo, adaptado de HALMENSCHLAGER (2002), de haver dois atributos candidatos a nó em uma determinada iteração da árvore

de decisão com a distribuição de classe Sucesso e Fracasso nas folhas desses atributos, conforme mostra a figura 2.11

FIGURA 2.11 – EXEMPLO DE ESCOLHA DE ATRIBUTOS EM DUAS POSSÍVEIS PARTIÇÕES



O ganho de informação, usando o logaritmo de base 2 e as equações 2.90, 2.93 e 2.97, para os atributos  $A_1$  e  $A_2$  é dado por<sup>11</sup>:

$$H(A_1) = \text{entropia}(\text{nó-pai}) = \sum -p \log p$$

$$H(A_1) = -\frac{4}{10} \log_2 \left( \frac{4}{10} \right) - \frac{6}{10} \log_2 \left( \frac{6}{10} \right) = 0,971$$

$$H(A_1 | D) = \text{entropia condicional}(\text{nó-pai} | \text{desfecho}) = \sum_{j=1}^n \frac{N(v_j)}{N} \text{entropia}(v_j)$$

$$H(A_1 | D) = \frac{5}{10} \left( -\frac{3}{5} \log_2 \left( \frac{3}{5} \right) - \frac{2}{5} \log_2 \left( \frac{2}{5} \right) \right) + \frac{5}{10} \left( -\frac{1}{5} \log_2 \left( \frac{1}{5} \right) - \frac{4}{5} \log_2 \left( \frac{4}{5} \right) \right) = 0,846$$

$$\text{Ganho de informação} = H(A_1) - H(A_1 | D)$$

$$I(A_1 | D) = 0,971 - 0,846 = 0,125$$

$$H(A_2) = -\frac{4}{10} \log_2 \left( \frac{4}{10} \right) - \frac{6}{10} \log_2 \left( \frac{6}{10} \right) = 0,971$$

$$H(A_2 | D) = \frac{5}{10} \left( -\frac{4}{5} \log_2 \left( \frac{4}{5} \right) - \frac{1}{5} \log_2 \left( \frac{1}{5} \right) \right) + \frac{5}{10} \left( -\frac{0}{5} \log_2 \left( \frac{0}{5} \right) - \frac{5}{5} \log_2 \left( \frac{5}{5} \right) \right) = 0,361$$

$$\text{Ganho de informação} = H(A_2) - H(A_2 | D)$$

$$I(A_2 | D) = 0,971 - 0,361 = 0,610$$

Como ganho de informação do atributo  $A_2$  é maior, ele seria o atributo considerado para entrar no modelo.

<sup>11</sup> A base do logaritmo é irrelevante, manteve-se a base 2 no exemplo por questões históricas, já que havia uma interpretação original relacionada com *bits* de informação quando Shannon propôs sua medida.

Vale lembrar que a probabilidade utilizada no cálculo de entropia é a fração de observações pertencentes a determinada classe no nó. Sendo assim, quanto menor a entropia, mais desbalanceada é a distribuição de classes. Em um determinado nó, a entropia é nula se todos os exemplos nele pertencerem à mesma classe. Analogamente, a entropia é máxima no nó se houver o mesmo número de casos para cada classe possível.

Desse modo, o critério de ganho de informação seleciona como atributo-teste aquele que minimiza a entropia, por ter a maior informação mútua com a variável resposta naquela iteração. O grande problema ao se utilizar o ganho de informação é que ele dá preferência a atributos com muitos valores possíveis. Um exemplo claro de problema ocorreria ao utilizar um atributo totalmente dispensável (por exemplo, um identificador único). Nesse caso, seria criado um nó para cada valor possível, e o número de nós seria igual ao número de identificadores. Cada um desses nós teria apenas um exemplo, o qual pertence a uma única classe, ou seja, os exemplos seriam totalmente discriminados. Assim, o valor da entropia seria mínima porque, em cada nó, todos os exemplos (no caso um só) pertencem à mesma classe. Essa divisão geraria um ganho máximo, embora a regra de classificação construída seja irrelevante.

Para contornar esse problema do ganho de informação, foi proposto em QUINLAN (1993) o uso da Razão de Ganho (*Gain Ratio*), que consiste no ganho de informação relativo como critério de avaliação:

$$\text{Razão de Ganho} = \frac{\text{Ganho de informação}}{\text{entropia(nó)}} \quad (2.121)$$

Pela Equação 2.121, é possível perceber que a razão não é definida quando o denominador é igual a zero. Além disso, a razão de ganho favorece atributos cujo denominador – a entropia – possui valor pequeno. Em QUINLAN (1988), é sugerido que a avaliação pela Razão de Ganho seja realizada em duas etapas. Na primeira, é calculado o ganho de informação para todos os atributos. Após isso, consideram-se

apenas aqueles que obtiveram um ganho de informação acima da média, e então se escolhe aquele que apresenta a melhor razão de ganho. Com esse procedimento, Quinlan mostrou que a Razão de Ganho supera o Ganho de Informação tanto em termos de acurácia, quanto em termos de complexidade das árvores de decisão geradas, sendo esse o método implementado no algoritmo C4.5 (QUINLAN, 1993).

A representação e o valor atribuído para o teste do nó, utilizados para definir as ramificações, influenciam de maneira decisiva no desempenho das árvores de decisão induzidas. No algoritmo C4.5 essas atribuições são feitas pelo método da pesquisa exaustiva com divisão sempre binária. Isso é possível porque mesmo que o domínio de um atributo contínuo seja infinito, o número de observações num conjunto de treinamento é finito e, portanto, o número de valores diferentes para esse atributo também é finito.

Assim, os exemplos do conjunto de treinamento são ordenados de acordo com seus valores para o atributo em questão. Supondo que os diferentes valores do atributo sejam, em ordem crescente,  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , o conjunto de treinamento é dividido em duas partes:  $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$  e  $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_m\}$ . Para cada  $a_i$ , com  $i$  variando entre 1 e  $m-1$ , é calculado o ganho para a respectiva divisão. Após avaliar todas as possibilidades, é escolhida a que fornece o maior ganho.

Por fim, é preciso definir o valor que será usado como limiar para o teste lógico. Tendo posse do  $a_i$  que produziu o melhor ganho, o valor mais utilizado como limiar é a média  $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ , pois assim espera-se que a árvore resultante apresente melhores resultados para exemplos que não participaram do conjunto de treinamento.

Uma vez encontrada a melhor divisão daquele nó, repete-se o processo de procura para cada nó filho, continuamente até que a divisão seja impossível ou interrompida, ou por não haver mais dados a serem classificados ou por não haver mais ganhos na ramificação.

Uma questão central do algoritmo de partição recursiva é a confiabilidade das estimativas do erro usado para selecionar as divisões. Durante o crescimento, as escolhas da divisão em níveis maiores da árvore produzem, com frequência, estatísticas não confiáveis, mesmo com o decréscimo da estimativa de medidas de erro (SOBRAL, 2003).

Como o algoritmo divide recursivamente o conjunto de dados de treinamento original, as divisões estão sendo avaliadas com amostras cada vez menores. Isto significa que as estimativas de erro têm menos confiabilidade à medida que a árvore cresce. Com intuito de minimizar este problema e evitar o *overfitting* dos dados de treinamento, usam-se métodos conhecidos como podagem.

Há duas maneiras de se executar a podagem: pré-podagem e pós-podagem. No primeiro, durante o crescimento, o algoritmo percorre os nós da árvore nos sentidos acedentes ou descendentes decidindo para cada nó, com base em critérios de avaliação, executar ou não a poda/finalização, transformando o nó em uma folha. No entanto, ao interromper dessa maneira o crescimento das regras de decisão, há o risco de se selecionar uma árvore subótima (BREIMAN *et al*, 1984). Na pós-podagem, a árvore é construída com seu tamanho máximo e, num segundo estágio, subárvores são testadas para se apresentar o resultado final. A desvantagem é o custo computacional quando o problema envolve árvores extremamente grandes.

BREIMAN *et al* (1984) descreveu duas alternativas para a seleção da árvore final baseada nas estimativas dos erros obtidos. Ou seleciona a árvore com menor erro estimado ou escolhe a menor árvore na sequência, cujo erro estimado está dentro do intervalo:  $\{\text{Err}_b; \text{Err}_b + \text{SE}(\text{Err}_b)\}$ , onde  $\text{Err}_b$  é o menor erro estimado e  $\text{SE}(\text{Err}_b)$  é o erro padrão desta estimativa. Quando as árvores são construídas com intuito de classificação, normalmente a podagem se dá em função de medidas de custo-complexidade e na redução do erro.



O ganho de informação, por exemplo, pode ser utilizado como critério de pré-podagem. Caso todas as divisões possíveis utilizando um atributo gerem ganhos menores que um valor pré-estabelecido  $x$ , então esse nó vira folha, representando a classe mais frequente no conjunto de exemplos. A dificuldade é encontrar um valor adequado para  $x$ , visto que um valor muito alto pode gerar uma árvore super-simplificada, enquanto que um valor muito baixo pode simplificar bem pouco a árvore (ROKACH e MAIMON, 2008).

Na pós-podagem, após ter a árvore completa, para cada nó interno da árvore, o algoritmo calcula a taxa de erro caso a sub-árvore abaixo desse nó seja podada. Em seguida, é calculada a taxa de erro caso não haja a poda. Se a diferença entre essas duas taxas de erro for menor que um valor pré-estabelecido, a árvore é podada. Caso contrário, não ocorre a poda. Esse processo se repete progressivamente, gerando um conjunto de árvores podadas. Por fim, para cada uma delas é calculada a acurácia na classificação de um conjunto de dados. No algoritmo C4.5 é feita uma busca na árvore, de baixo para cima, transformando em nós folha os nós intermediários sempre que o valor do erro do nó for inferior à soma dos erros de seus descendentes. O erro é definido como a razão  $k$  de classificações erradas pelas  $n$  observações do conjunto de treinamento. Essa técnica é conhecida por *error based pruning* (HALMENSCHLAGER, 2002).

## 2.8 AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO DE CLASSIFICAÇÃO

Segundo JOHNSON e WICHERN (1998), uma fase fundamental do problema de classificação é a determinação de sua eficiência. Uma maneira de avaliar o desempenho de um procedimento de classificação consiste no cálculo da Taxa de Erro de Reconhecimento (TPM – *Total Probability of Misclassifications*), desde que sejam conhecidas as funções de distribuições das populações, sendo dada por

$$TPM = p_1 \int_{R_2} f_1(\underline{x}) d\underline{x} + p_2 \int_{R_1} f_2(\underline{x}) d\underline{x} \quad (2.122)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são as probabilidades de uma observação pertencer a  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente.

O valor mínimo para a quantidade acima, chamado Taxa Ótima de Erro (OER – *Optimum Error Rate*), é obtido pela escolha adequada das regiões  $R_1$  e  $R_2$ , onde as regiões são determinadas por:

$$R_1 : \frac{f_2(\underline{x})}{f_1(\underline{x})} \geq \frac{p_2}{p_1} \text{ e } R_2 : \frac{f_2(\underline{x})}{f_1(\underline{x})} < \frac{p_2}{p_1} \quad (2.123)$$

Em geral não se conhece a função de distribuição das populações, então se calcula a taxa de erro associada com a função de classificação amostral. A performance da função de classificação da amostra pode, em princípio, ser avaliada pelo cálculo da Taxa Real de Erro (AER – *Actual Error Rate*), dada por

$$AER = p_1 \int_{\hat{R}_2} f_1(\underline{x}) d\underline{x} + p_2 \int_{\hat{R}_1} f_2(\underline{x}) d\underline{x} \quad (2.124)$$

onde:  $\hat{R}_1$  e  $\hat{R}_2$  representam a região de classificação determinada pelos tamanhos das amostras  $n_1$  e  $n_2$ , respectivamente.

A AER da equação 2.124 indica a performance da função classificação da amostra em amostras futuras, porém, em geral, é difícil de ser calculada porque depende das funções densidades de probabilidade  $f_1(\underline{x})$  e  $f_2(\underline{x})$  que são muitas vezes desconhecidas.

Para evitar essa dependência da forma de distribuição de probabilidades, uma alternativa é calcular a Taxa Aparente de Erro (APER – *Apparent Error Rate*), definida como sendo a fração das observações no treinamento amostral referente ao reconhecimento errôneo pela função obtida. Esta taxa é calculada pela Matriz de Confusão, que apresenta a real situação das observações nos grupos comparando-a com o reconhecimento apresentado pelo modelo encontrado. Para  $n_1$  observações de  $\pi_1$

e  $n_2$  observações de  $\pi_2$ , a matriz de confusão tem a seguinte forma:

QUADRO 2.2 – MATRIZ CONFUSÃO

CLASSIFICAÇÃO REAL	CLASSIFICAÇÃO PREVISTA	
	$\Pi_1$	$\Pi_2$
$\Pi_1$	$n_{1/1}$	$n_{1/2}$
$\Pi_2$	$n_{2/1}$	$n_{2/2}$

onde:  $n_{ij}$  são as observações de  $\Pi_i$  classificadas como de  $\Pi_j$  de maneira correta se  $i = j$  e incorreta se  $i \neq j$ .

Com base nessa matriz, a taxa aparente de erro (APER) é dada por

$$APER = \frac{n_{1/2} + n_{2/1}}{n_1 + n_2} \quad (2.125)$$

Essa taxa deve ser interpretada como a proporção de observações classificadas incorretamente, porém tende a subestimar a AER a menos que os tamanhos das amostras  $n_1$  e  $n_2$  sejam grandes. Isso se deve, essencialmente, porque os dados usados para construir a função de classificação também são usados para sua avaliação.

Um procedimento alternativo é dividir a amostra total em uma parte usada para o treinamento, de forma a construir a função classificação e outra usada para a avaliação. Embora esse método supere o problema da tendenciosidade por não usar os mesmos dados para construir e julgar o modelo ele conta com dois defeitos: o grande número de observações necessárias na amostra e boa parte desses dados estarem concentrados na construção da função de classificação, de forma a não desperdiçar informação, porém tirando significância da amostra de avaliação.

Por isso sugere-se a abordagem de LACHENBRUCH (1975) como técnica estatística para avaliar o desempenho da regra de reconhecimento de padrões e, dessa forma, estimar a probabilidade de classificação correta e incorreta em cada grupo.

Essa abordagem, uma forma de *cross validation*, inicia-se com a escolha de uma das categorias e a exclusão de uma observação. A seguir constrói-se a função discriminante para  $n_1 - 1$  observações restantes da primeira categoria e  $n_2$  observações

da segunda. De posse dessa função classifica-se a observação retirada anteriormente. Em seguida realoca-se a observação descartada e repetem-se todos os passos para o primeiro grupo e, em seguida para o segundo grupo, ajuntando-se, por fim, a Função Discriminante para o total de  $n_1 + n_2$  observações.

As estimativas das probabilidades de classificações erradas obtidas são:

- Probabilidade de classificação errada em  $\pi_2$  quando pertence a  $\pi_1$

$$P(2|1) = \int_{R_2} f_1(\underline{X}) d\underline{X} = \frac{n_{1/2}}{n_1} \quad (2.126)$$

- Probabilidade de classificação errada em  $\pi_1$  quando pertence a  $\pi_2$

$$P(1|2) = \int_{R_1} f_2(\underline{X}) d\underline{X} = \frac{n_{2/1}}{n_2} \quad (2.127)$$

Desta forma, a proporção total esperada de erro é dada por:

$$\hat{E}(\text{APER}) = \frac{n_{1/2} + n_{2/1}}{n_1 + n_2} \quad (2.128)$$

Essa é uma maneira de se obter uma regra de reconhecimento e classificação construída com as  $n$  observações amostrais e testada com todas as referidas observações, mas sempre com a observação em teste fora do ajuste. Isto equivale a ter um grupo com  $n$  observações para o ajuste e outro grupo, também de tamanho  $n$ , para testar a eficiência do procedimento.

## 2.5 ESTUDOS ANTERIORES SOBRE AÇÕES

Hoje em dia as informações são cada vez mais acessíveis e as técnicas de compilação dos dados mais sofisticadas. Dentro desse contexto, tem se tornado simples testar diferentes estratégias de investimento. São inúmeros os estudos e pesquisas sobre estratégias que, ao longo do tempo, têm conseguido ganhar do mercado. No entanto, três cuidados devem ser tomados em relação a estas pesquisas.

Por serem baseadas no passado, as estratégias sempre mostram o que já

aconteceu, mas estratégias que conseguiram retornos substanciais no passado podem não ser viáveis atualmente, seja por modificações no mercado ou na disseminação da prática, que acaba anulando a si própria. “À medida que estas estratégias bem-sucedidas se tornam públicas, quer diretamente, através de livros e artigos, quer indiretamente, através de gerentes de carteira que delas se utilizam, é de se esperar que se tornem menos eficazes” (DAMODARAN, 2006a, p. 11).

Outro fato é que muitas das pesquisas se baseiam em carteiras hipotéticas, dando pouca ou nenhuma atenção aos custos de transação e às taxas envolvidas. Esses custos podem afetar os retornos observados de forma a diferir muito dos retornos projetados para carteiras hipotéticas. No entanto, esses custos são mais acentuados em carteiras com volume grande de transações e focadas no curto-prazo, carteiras com poucas revisões e projetadas para longo prazo sofrem muito menos interferência desses custos, podendo ser, de fato, desprezados.

O mais importante é que o teste de uma estratégia de investimento é quase sempre um teste conjunto também de um modelo de risco. Afinal é perfeitamente possível que retornos elevados reflitam o maior risco associado ao portfólio e não pelo sucesso da estratégia. Muitos dos estudos desconsideram os ajustes ao risco, levando a resultados duvidosos. Apesar de quase nunca haver certeza de que o modelo usado para avaliar o risco é correto, esse ajuste pode evitar conclusões muito equivocadas.

As pesquisas sobre Análise Fundamentalista frequentemente comparam ações de valor (*value stocks*) com ações de crescimento (*growth stocks*) e seu desempenho em relação ao mercado. Diversos múltiplos de mercado e os próprios filtros de Graham foram testados nesse sentido em diversos mercados do mundo. Esses trabalhos têm como mérito, também, identificar variáveis capazes de justificar o retorno apresentado pelas ações, sendo que diversas dessas variáveis explicativas fazem parte desse projeto. Um histórico dessas pesquisas é apresentado a seguir.

### 2.5.1 Estudos realizados no exterior

O mercado mais rico em pesquisas dessa espécie é o mercado norte-americano, no qual diversos pesquisadores examinaram o retorno oferecido pelas ações e encontraram significativa relação entre o retorno oferecido por elas e algumas variáveis analisadas.

BASU (1977) mostrou que, no período de abril de 1957 até março de 1971, no mercado norte-americano, carteiras contendo ações com baixa relação P/L apresentaram retorno anual médio entre 13,5% e 16,3%. Já os portfólios contendo ações com elevada relação Preço por Lucro apresentaram retorno anual médio entre 9,3% e 9,5%. Entretanto, observou que, apesar de o retorno estar associado com baixa relação P/L, não estava associado com risco elevado.

Uma alternativa ao índice P/L é o uso do múltiplo Preço por Vendas (P/V). SENCHACK e MARTIN (1987) compararam o desempenho de carteiras com baixos índices P/V e concluíram que as carteiras apresentavam um desempenho superior ao mercado, mas não superior ao das carteiras com baixo P/L. JACOBS e LÉVY (1988a; 1988b) testaram a significância dos baixos índices P/V (padronizados pela média de empresas de um mesmo setor) e concluíram que as ações de empresas com baixos índices P/V, mesmo quando considerados isoladamente, geravam um retorno excedente de cerca de 2% ao ano no período de 1978 a 1986 nos Estados Unidos. Os autores analisaram 25 medidas e, mesmo quando outros fatores eram incluídos na análise, o índice P/V continuava significativa na explicação dos retornos excedentes, juntamente com o índice P/L e o porte da empresa.

Sobre a influência do tamanho da empresa, BANZ (1981) relatou que ações de empresas pequenas em termos de Preço de Mercado (PM) apresentam retorno superior àquelas ações consideradas grandes no mercado acionário norte-americano durante os anos de 1936 até 1975.

FAMA e FRENCH (1992), em estudo de grande repercussão, descobriram

que os retornos observados entre 1963 e 1990 possuíam uma alta correlação com o índice P/VC e com o PM da empresa, sendo que a relação Preço por Valor Contábil explicava mais a variação entre retornos sobre ações do que qualquer outra variável fundamentalista, incluindo o valor de mercado. A abordagem de carteira utilizada consistiu na construção de 12 portfólios classificados, dentre outros, pelo seu múltiplo P/VC. As empresas da categoria de mais alto preço/valor contábil tiveram rendimento mensal médio de 0,30% ao passo que as de categoria com o múltiplo mais baixo obtiveram rendimento mensal médio de 1,83%.

Os autores sugeriram, inclusive, que estas medidas fossem usadas como variáveis explicativas do risco e apresentaram uma equação de regressão alternativa ao modelo CAPM para os retornos mensais das ações negociadas na Bolsa de Nova York.

Essa sugestão está em concordância com o estudo de JAGADEESH (1992), que analisou o retorno esperado pelas ações no mercado americano, no período de janeiro de 1954 até dezembro de 1989, e concluiu que o fator risco, medido pelo beta, não conseguia explicar as diferenças de retorno entre 20 portfólios diferenciados com ações de pequenas empresas até portfólios com ações de grandes empresas.

Fora dos Estados Unidos, CHAN, HAMAO e LAKONISHOK (1991; 1993) mostram que o retorno esperado para as ações, no Japão, é positivamente relacionado com os fatores Preço de Mercado/Valor Contábil e Rendimento de Fluxo de Caixa. Para os fatores “tamanho” da empresa e Lucro/Preço, os resultados encontrados são dependentes do período analisado e do modelo de risco utilizado. Os autores verificaram que as ações “pequenas” superaram o retorno apresentado pelas ações de “grandes” empresas, analisando, no Japão, 1570 ações no período de 1971 a 1988. Entre as quatro variáveis consideradas, o índice P/VC foi o mais significativo para justificar o retorno apresentado pelas ações.

CAPPAUL, ROWLEY e SHARPE (1993) mostraram que as ações de valor apresentaram maior retorno que as ações de crescimento na França, Alemanha, Suíça,

Inglaterra e Estados Unidos no período entre 1981 e 1992, observando que ações com indicador P/VC baixo conseguiam retornos excedentes em todos os mercados analisados. Os retornos desses estudos foram anualizados e são apresentados no Quadro 2.3 a seguir.

QUADRO 2.3 – ESTIMATIVAS ANUALIZADAS DAS DIFERENÇAS DE RETORNO PARA CARTEIRAS COM BAIXO P/VC

País	Retorno excedente
França	3,26%
Alemanha	1,39%
Suíça	1,17%
Reino Unido	1,09%
Japão	3,43%
EUA	1,06%
Europa	1,30%
Global	1,88%

Fonte: Adaptado de CAPAUL, ROWLEY e SHARPE (1993); CHAN, HAMAO e LAKOSHINOK (1991)

FAMA e FRENCH (1992; 1996) e também LAKONISHOK, SHLEIFER e VISHNY (1994) indicaram que, nos Estados Unidos, as ações de valor apresentaram maior retorno que as ações de crescimento. O estudo de MUKHERJI, DAHTT e KIM (1997) revelou essa relação entre baixos múltiplos e rendimentos elevados também em mercados emergentes.

HAUGEN e BAKER (1996) argumentam que, em média, o prêmio das ações de valor tende a aumentar, porque o mercado desvaloriza essas ações e valoriza ações de crescimento. Quando essas imperfeições de preço são corrigidas, então as ações do tipo *value* apresentam o alto retorno e as ações do tipo *growth* apresentam baixo retorno. Por outro lado, FAMA e FRENCH (1993; 1996) colocam que o valor do prêmio é a compensação pelo risco estabelecido pelo modelo CAPM de SHARPE (1964) e LINTNER (1965).

Numa pesquisa realizada em 21 países (não incluindo os Estados Unidos) por um período de 10 anos, BAUMAN, CONOVER e MILLER (1998) indicam que os portfólios com ações de valor superam as ações de crescimento por larga margem.



Nessa pesquisa quatro variáveis fundamentalista foram utilizadas: Preço por Lucro, Preço por Valor Contábil, *Dividend Yield* e preço por fluxo de caixa. Os autores constataram que as ações do tipo *value* apresentaram retorno superior às ações do tipo *growth*. Além disso, quando carteiras contendo ações de valor apresentaram altos retornos, eles tendem a superar carteiras de crescimento com uma larga margem. Entretanto, as ações de valor, como um grupo, não vencem todos os anos em todos os mercados no período analisado de 1986 até 1996.

FAMA e FRENCH (1998) confirmaram que as ações de valor apresentaram maior retorno que as ações de crescimento em doze dos treze maiores mercados mundiais, após estudar as ações no período de 1975 a 1995.

HESTON, ROUWENHORST e WESSELS (1999) analisaram o comportamento de 2100 ações em 12 países da Europa entre 1980 e 1995, verificando a influência dos fatores beta e tamanho no retorno apresentado pelas ações. Nos países da Europa, dentro do período analisado, carteiras com ações de “pequenas” empresas apresentam melhor desempenho do que as ações de “grandes” empresas, para casos em que o risco beta é semelhante. Através da comparação entre carteiras com ações de empresas que apresentam diferenças no fator risco (beta), porém com o mesmo tamanho, verifica-se que ações com elevado risco superaram em 10% as ações com baixo risco. Para os autores, o fator risco e o fator tamanho apresentaram distintos papéis na explicação do retorno apresentado pelas ações nos países Europeus. Nesse estudo, eles também demonstraram que a relação entre retorno e variável beta é mais forte entre setores do que entre países analisados. Além disso, o fator tamanho mostrou-se mais forte que o fator risco para explicar o retorno das ações.

PIOTROSKI (2000) investigou o múltiplo P/VC e mostrou que a média de retorno ajustada superava em 7,5% a média do mercado, gerando um rendimento médio anual de 23% entre 1976 e 1996 no mercado norte-americano.

A distribuição de dividendos foi alvo de estudo por parte de ARNOTT e

CLIFFORD (2003) nos Estados Unidos com a conclusão de que há uma correlação entre dividendos e lucros, sendo que, ao longo de períodos decenais, a taxa média de crescimento dos lucros foi 3,9 pontos maior quando os dividendos eram mais altos do que quando eram mais baixos. NISSIM e ZIV (2001) revelaram que as companhias que elevam seus dividendos não apenas tiveram retornos de ações melhores naquele ano, mas também viram esse efeito perdurar por pelo menos quatro anos após a mudança nos dividendos.

DAMODARAN (2006b) atualizou os estudos acerca dos múltiplos P/L e P/VC. O autor analisou os rendimentos anuais que seriam obtidos com ações norte-americanas divididas em dez categorias segundo seus múltiplo P/L, de 1952 a 2001. Em carteiras igualmente ponderadas as ações com menor múltiplo P/L tiveram um rendimento anual médio de 24,11% e as de múltiplo P/L mais alto renderam 13,03%. Com as carteiras ponderadas com base no Preço de Mercado das empresas os rendimentos foram, respectivamente, de 20,85% e 11%.

Em relação ao P/VC foram também construídas 10 carteiras no mercado acionário norte-americano para o período de 1927 a 2001 e verificou-se que os rendimentos superiores proporcionados pelas ações de baixo P/VC persistiram no decorrer do período, porém em diversos momentos o seu desempenho foi inferior. DAMODARAN (2006b) conclui que os retornos são substancialmente maiores em momentos críticos, como durante a recessão americana dos anos de 1930, durante a Segunda Guerra Mundial, no final da década de 1970 e no início da década de 1990, dando as ações de baixo P/VC um caráter defensivo frente às incertezas da economia.

O investimento em valor, com base em diversos critérios com a expectativa de retornos adequados e construção de uma carteira defensiva é o objetivo dos filtros de Graham. Muitos dos trabalhos aqui descritos tinham como variáveis algumas das utilizadas nos filtros de Graham, mas, embora apresentem resultados promissores, nenhum dos citados anteriormente testou o conjunto dos critérios.

Alguns estudos se preocuparam com esse fato, de forma que existem também evidências empíricas do uso direto dos filtros de Graham. Além das próprias pesquisas do autor, mostrando a eficácia de sua abordagem no período em que foi vivo, até 1976 (GRAHAM; DODD, 1951; GRAHAM, 2007), no início dos anos 1980, OPPENHEIMER e SCHLARBAUM (1981) testaram a abordagem de Graham para determinar sua eficiência e encontraram, após ajustes de risco, um rendimento entre 3% a 3,5% maior que o do mercado, no período de 1956 até 1975.

OPPENHEIMER (1984) também estudou as carteiras obtidas com os critérios de Graham de 1974 a 1981 e concluiu que teria sido possível obter um retorno anual superior ao do mercado. Durante esse período a média anual de retornos foi de 38%, significativamente maior que os 14% de rendimento anual proporcionado pelos índices das bolsas americanas no mesmo período. Em todos os períodos analisados a estratégia produziu retornos positivos, o mínimo foi de 26,16% ao ano e o máximo de 46,68% ao ano.

VU (1988) mostrou que o filtro mais restritivo de Graham, o de preço inferior ao capital de giro líquido, continuou gerando lucros nos anos de 1977 e 1984. O próprio Graham apresentou resultados desse método de seleção de ações (GRAHAM, 2007) na década de 1950, obtendo um rendimento de 75% contra 50% do índice S&P 500. Usando uma metodologia de estudo de eventos, VU (1988) selecionava as ações da bolsa de Nova York assim que o Preço de Mercado cai abaixo do valor do capital de giro líquido (e não abaixo de 66% do CGL, como recomenda o filtro) e vendia o papel dois anos depois, estratégia que apresentou um retorno excedente de 25,1%. Em LAUTERBACH e VU (1993) o estudo de evento foi replicado para outros períodos, de 3, 4 e 5 anos, apresentando essencialmente os mesmos resultados. Todavia, o autor levanta a hipótese desse retorno anormal se dever ao “efeito tamanho”, visto que as empresas tipicamente selecionadas pelo filtro eram empresas de pequeno porte e que correções acerca do viés de tamanho tornariam

inexpressivos os retornos anormais.

ABY *et al* (2001) focaram sua pesquisa em variáveis fundamentalistas, de maneira muito parecida com a proposta de Graham. Eles desenvolveram portfólios baseado em quatro condições fundamentais: P/L menor que 10, P/VC menor que 1, Retorno sobre o Patrimônio Líquido (ROE) maior que 12% e porcentagem dividendos pagos em relação ao lucro (*payout ratio*) de pelo menos 25%. Os autores mostraram que no período de 1989 a 1999 a taxa *payout* não se mostrou um bom parâmetro para indicar retornos excedentes a longo prazo, mas os autores encontraram no filtro para o ROE um claro demarcador entre ações de desempenho acima da média das ações com desempenho abaixo da média. O uso desses filtros, aplicado a 6000 ações, gerou um retorno médio de 30,55% no período.

Damodaran também argumenta a força das evidências factuais acerca da abordagem de Graham: “a melhor demonstração de que as ideias de Graham sobre investimento em valor funcionam não vem de estudos acadêmicos [...], e, sim, do sucesso de muitos de seus alunos em Columbia. Embora tenham escolhido caminhos diversos, muitos acabaram no mercado financeiro e registraram histórias de sucessos extraordinários” (DAMODARAN, 2006a, p. 230). Alguns de seus destacados discípulos, gestores de fundos e conhecidos investidores de *Wall Street* são: Walter Schloss, Tom Knapp, Ed Anderson, Bill Ruane, Charlie Munger, Rock Guerin, Stan Perlmet e, o investidor que mais acumulou capital em todos os tempos, Warren Buffett.

## 2.5.2 Estudos realizados no Brasil

BRUNI (1998), analisando o comportamento de 265 ações preferenciais e 65 ações ordinárias de empresas brasileiras negociadas na Bovespa, no período compreendido entre julho de 1986 e julho de 1997, encontra as seguintes associações entre o retorno apresentado pelas ações e variáveis fundamentalistas.

Ações ordinárias e preferenciais com o múltiplo P/VC baixo apresentaram retornos significativamente mais elevados para o período de 1988 a 1995. Em relação ao múltiplo P/L os resultados observados não foram considerados significativos para nenhum momento do período estudado, o mesmo ocorrendo para a relação preço por fluxo de caixa (P/FC).

Com base na menor relação P/VC o portfólio constituído pelas ações ordinárias apresentou um retorno anual médio de 88%, frente a um retorno de 50% das ações preferenciais com baixa relação P/VC e 41% do índice de mercado Ibovespa.

Não foi encontrada relação significativa entre risco e retorno das ações, a não ser para o período de 1988 a 1994 para as ações preferenciais. Nesse período foi encontrada uma associação positiva entre o retorno e o beta.

RAMOS, PICANÇO e COSTA JR (2000) compararam, para o período de 1988 até 1994, o retorno e risco de ações de valor e de crescimento concluindo que as ações denominadas *value*, devido ao baixo índice P/VC, apresentaram rentabilidade média superior ao portfólio de ações composto pelas ações denominadas *growth*. Constataram também que o coeficiente beta do modelo CAPM do portfólio *value* é, em média, um pouco menor do que o coeficiente beta do portfólio *growth*.

COSTA JR e NEVES (2000) realizaram um estudo no mercado brasileiro cujo objetivo principal foi verificar a influência das variáveis fundamentalistas nas rentabilidades médias das ações. O período de análise compreende de 1987 a 1996 e as variáveis explicativas utilizadas nesse estudo foram: Preço/Lucro, Preço de Mercado, Preço/Valor Contábil e o beta do modelo CAPM.

Os resultados obtidos no estudo de Costa Jr e Neves mostraram um relacionamento negativo entre a rentabilidade média das carteiras e as variáveis P/L, P/VC e PM.

Os coeficientes negativos do índice Preço/Lucro e do Preço de Mercado obtidos nesse estudo confirmam os resultados de HAZZAN (1991) para o mercado

brasileiro, no qual carteiras compostas de ações de baixo P/L tendem a proporcionar melhor desempenho do que as de P/L alto, mesmo após ajustes ao risco. O estudo foi replicado por BORGES (2008) para o período de 1995 a 2007 e o resultado se manteve. No período, carteiras com P/L baixo tiveram rendimento significativamente superior de 37,63% ao ano, enquanto o Ibovespa rendeu 27,71%. Resultado superior que se mantém mesmo quando o retorno é ajustado ao risco pelo modelo CAPM.

Também ALBERTO e VIEIRA (2011) analisaram o múltiplo P/L entre 1999 e 2007, porém restringindo-se às empresas pertencentes ao Índice Bovespa. Mesmo com essa condição, os ativos do primeiro quartil do índice ofereceram retornos acima do Ibovespa em todos os períodos da amostra.

Contudo, embora as variáveis fundamentalistas analisadas no trabalho de COSTA JR e NEVES (2000) tenham influência nas explicações das variações das rentabilidades médias das ações, o beta é fortemente representativo, sendo a variável que mais se destacou nessa explicação. Assim, baseados nos testes realizados, os autores afirmaram que o CAPM está mal especificado, devido à possibilidade de inclusão de outros fatores no comportamento dos retornos dos ativos, além do beta.

Uma análise empírica do *Dividend Yield* no mercado brasileiro foi realizada BUENO (2002) com dados de 1994 até 1999 que não observou evidências de uma associação entre a taxa de dividendos e o retorno das ações. Ao realizar um método de carteiras para comparação das rentabilidades, o autor observou que o portfólio composto por empresas que não distribuem dividendos obteve a maior rentabilidade, porém nenhum teste estatístico foi conclusivo sobre a significância dessa e das outras observações. Essa é uma evidência contrária a de ARNOTT e CLIFFORD (2003) o que deixa dúvidas sobre a variável DY como explicativa dos retornos observados no mercado acionário brasileiro.

SILVA (2003) analisou as variáveis Preço de Mercado, Preço por Lucro, Preço por Valor Contábil e o Retorno sobre o Patrimônio Líquido sobre o retorno das

ações no mercado acionário brasileiro no período de 1993 a 2003. A pesquisa apresentou diferenças estatisticamente significativas apenas nos índices P/L e P/VC, com as carteiras compostas por baixos múltiplos apresentando retornos estatisticamente superiores, 117,4% e 107,5% ao ano, respectivamente, contra 50,4% do Ibovespa.

Analizando a correlação entre variáveis fundamentalistas, o risco beta e o retorno das ações, NAGANO, MERLO e SILVA (2003) concluíram que existe uma correlação positiva entre o retorno e o beta e liquidez das ações, e negativa entre o retorno e o valor de mercado, preço por valor patrimonial e Preço por Lucro. A amostra do estudo contou com as 55 empresas componentes do índice Ibovespa do período de 1995 a 2000. A correlação mais significativa foi a do índice P/L, seguida por valor de mercado. Não foram identificadas correlações significativas entre o retorno das ações e os índices Preço/Fluxo de Caixa, Preço/Vendas, *Dividend Yield* e os níveis de endividamento das companhias.

ROSTAGNO, SOARES e SOARES (2008) analisaram 37 variáveis fundamentalistas para o período de 1995 a 2002 e identificaram a relevância do endividamento, tamanho, Retorno sobre Ativos e patrimônio líquido, P/L e DY, entre outras, como variáveis capazes de separar as carteiras entre vencedores e perdedoras no período.

SANTOS (2010) analisou a rentabilidade das ações de valor em comparação com as ações de crescimento no mercado brasileiro de 1989 a 2008. Como critério para a separação dos grupos, ele utilizou os quartis extremos dos múltiplos P/L e P/VC, que, quando baixos, caracterizariam empresas de valor. Foram analisados diversos contextos (mercados de alta/baixa, pré/pós plano Real, contração/expansão econômica) e em todos eles a carteira composta pelos ativos com os dois múltiplos baixos teve retorno significativamente superior (ao nível de 10%) à carteira de crescimento.

SOARES (2008) realizou diversos testes estatísticos utilizando técnicas de séries temporais (modelos ARIMA), transformadas *wavelets* e o uso de redes neurais para modelar a série temporal de 15 ações do Ibovespa de 1999 a 2006. Além das próprias cotações, ele utilizou inicialmente 11 variáveis financeiras e macroeconômicas para alimentar seus modelos. A conclusão é que as variáveis fundamentalistas podem se mostrar relevantes ou não de acordo com a empresa selecionada, com casos inclusive em que nenhuma das variável fundamentalista se mostraram correlacionadas com a série temporal das ações. Porém, endividamento, valor de mercado, lucro líquido, taxa básico de juros e risco país se mostraram úteis para a maioria dos papéis.

De forma bastante similar ao estudo anterior, MACIEL e BALLINI (2009) analisaram a rentabilidade das seis principais ações do Ibovespa de 2003 a 2007. Eles concluíram que o valor de mercado, o lucro líquido, o Índice Bovespa e a Taxa de Câmbio são variáveis relevantes para a construção de modelos do comportamento de ações, ocasionando modelos com predição superior a modelos tradicionais baseados somente em séries temporais.

Infelizmente, no Brasil, são pouquíssimos os trabalhos que tratam especificamente da abordagem de Graham. Num levantamento bibliográfico encontrou-se apenas dois: PASSOS (2006) e SALGUEIRO (2007).

PASSOS (2006) discute as teorias de Graham e verifica sua aplicabilidade ao mercado acionário brasileiro propondo, sem o rigor de um modelo formal, uma carteira de ativos com base nessa abordagem. Com base nos dados de 1994 a 2000, foi construído um portfólio para ser avaliado nos cinco anos seguintes. O retorno da carteira proposta, para o período de 2001 a 2005 foi de 566%, contra 219% do Ibovespa, porém sem fazer menção a testes estatísticos de significância ou a ajustes de risco para o retorno.



SALGUEIRO (2007) explora os fundamentos teóricos, expondo em detalhes os instrumentos de análise, reflexão e tomada de decisão da abordagem de Graham e os aplicando ao mercado acionário brasileiro no período de 1997 a 2001. O resultado apresentado foi de uma rentabilidade acumulada de 646,65% da abordagem de Graham face a 277,56% do retorno acumulado do Ibovespa no período. Entretanto, também nesse trabalho, não foram utilizados especificamente os filtros e a comparação da rentabilidade não foi ajustada ao risco e nem foram feitos testes estatísticos sobre a significância desses retornos.

Um resumo dos indicadores que explicam um retorno acima do mercado é dado pelo Quadro 2.4 a seguir.

QUADRO 2.4 – RESUMO DAS VARIÁVEIS EXPLICATIVAS

Variável Explicativa Observada	Estudos	Referências
PM	Internacionais: 8	BANZ (1981); JACOBS; LÉVY (1988a; 1988b); CHAN; HAMAO; LAKONISHOK (1991; 1993); JAGADEESH (1992); FAMA; FRENCH (1992); HESTON, ROUWENHORST; WESSELS (1999).
	Nacionais: 5	COSTA JR; NEVES (2000); NAGANO, MERLO e SILVA (2003); ROSTAGNO, SOARES e SOARES (2008); SOARES (2008); MACIEL e BALLINI (2009).
P/L	Internacionais: 6	BASU (1977), SENCHACK; MARTIN (1987); JACOBS; LÉVY (1988a; 1988b); DAMODARAN (2006b); ABY <i>et al</i> (2001) .
	Nacionais: 7	HAZZAN (1991); COSTA JR; NEVES (2000); SILVA (2003); NAGANO, MERLO e SILVA (2003); ROSTAGNO, SOARES e SOARES (2008); BORGES (2008); ALBERTO e VIEIRA (2011).
P/VC	Internacionais: 6	CHAN; HAMAO; LAKONISHOK (1991); CAPAUL; ROWLEY; SHARPE (1993); FAMA; FRENCH (1992); PIOTROSKI (2000); DAMODARAN (2006b); ABY <i>et al</i> (2001).
	Nacionais: 4	BRUNI (1998); RAMOS, PICANÇO; COSTA JR (2000); COSTA JR; NEVES (2000); SILVA (2003).
P/V	Internacionais: 3	SENHACK; MARTIN (1987); JACOBS; LÉVY (1988a; 1988b).
DY	Internacionais: 1	ARNOTT; CLIFFORD (2003).
	Nacionais: 2	BUENO (2002); ROSTAGNO, SOARES e SOARES

cont.

		(2008).
P/CGL	Internacionais: 1	VU (1988).
Filtros de Graham	Internacionais: 4	OPPENHEIMER; SCHLARBAUM (1981); OPPENHEIMER (1984); ZARGHAM; HU (1996); VANSTONE, FINNIE; TAN (2005).

### 2.5.3 Modelos desenvolvidos

Em geral muitas técnicas podem ser aplicadas ao mercado acionário com a intenção de esclarecer os fatores que influenciam na performance de ações. Elas podem obter resultados positivos em determinadas condições ou em períodos particulares de tempo, embora tenham a pretensão de serem gerais. Regras de decisão do tipo “*if-then*”, como são os filtros de Graham, foram aplicados ao mercado de ações para extrair regras de seleção baseado em árvores de decisão (QUINLAN, 1993). A limitação deste método é que seus atributos tendem a se tornar ineficientes a valores muito próximos dos limites estabelecidos e os qualificadores podem ficar ultrapassados com o tempo. Para solucionar esse primeiro problema, a lógica *fuzzy* de decisão foi aplicada por ZARGHAM e HU (1996) e ZARGHAM e SAYEH (1999) na construção de sistemas especialistas.

Há, ainda, outra desvantagem. Uma vez criadas, as regras de decisão podem ficar obsoletas rapidamente. Outra importante classe de abordagem ao problema é o uso de redes neurais artificiais. Por sua flexibilidade e robustez, essa técnica vem se tornando muito importante na predição acerca do mercado de ações, porém muitas vezes relacionada a séries temporais do preço das ações, em aplicações de análise gráfica. Em geral, as redes neurais têm várias vantagens e podem ser facilmente combinadas com outras abordagens de inteligência artificial, porém são difíceis de implantar e podem, frequentemente, não apresentar boas soluções (LIU, ZARGHAM; 2006). Sendo assim, outra opção é o uso da Análise Discriminante, extremamente interessante quando suas premissas forem satisfeitas e o número de observações for

muito superior ao número de variáveis analisadas, como é o caso do presente projeto.

Não foram encontrados, dentro da literatura pesquisada, muitos exemplos de modelos de reconhecimento de padrão desenvolvidos a partir dos filtros de Graham ou de variáveis fundamentalistas que se aproximassem da abordagem de Graham.

ZARGHAM e HU (1996) desenvolveram um sistema especialista a partir dos dez critérios de Graham e do uso da lógica *fuzzy*. A aplicação do sistema foi feita em 6017 ações da bolsa de Nova York entre 1988 e 1993, com a seleção das de 20 melhor classificação no final de cada ano para a construção do portfólio. A carteira de igual ponderação oferecendo um retorno anual composto de 73,1% e a carteira ponderada um retorno de 86,8% contra 10% do S&P500, porém não houve qualquer ajuste para o risco das carteiras formadas.

VANSTONE, FINNIE e TAN (2005) também aplicaram integralmente os filtros de Graham ao mercado acionário australiano no período de 1994 até 2001, junto a técnicas de gestão de risco e manejo do capital a partir de técnicas de redes neurais. Os autores conseguiram resultados bastante animadores, ainda que sem ajuste de risco. A estratégia mais próxima à proposta por Graham gerou um retorno anual médio de 34,42% frente à 7,35% da média do mercado.

LIU e ZARGHAM (2006) selecionaram sete variáveis fundamentalistas – valor contábil, Liquidez Corrente, *Dividend Yield*, razão P/VC, razão P/L, crescimento dos lucros e estabilidade dos lucros. Primeiro foram obtidas correlações não-lineares entre os pares das variáveis e, a partir desses dados, extraiu-se regras que foram usadas para selecionar ações cujo retorno superava o mercado. As regras de seleção foram desenvolvidas a partir dos dados do mercado norte-americano de 1993 até 1998 e aplicados para no período de 1999 até 2003, com as regras identificadas gerando retornos acima do índice de mercado S&P 500. A melhor das regras de seleção apresentou grande variação dos retornos, mas teve um valor anual composto de 48,9% contra 15,6% do mercado, sem que os retornos fossem ajustados de acordo com o

risco.

Em levantamento junto às principais instituições de ensino superior do Brasil e periódicos da área, encontra-se bastante disseminado o uso de técnicas de reconhecimento de padrões para análise de séries temporais através da escola técnica/grafista de avaliação de ativos. Exemplos são LAZO (2000), HAYASHI (2002), SOUZA (2006), PINTO (2006), SOARES (2008) e MACIEL e BALLINI (2009), e poucos modelos formais baseados na Análise Fundamentalista, na qual se insere a abordagem de Graham.

ANTUNES, CORRAR e KATO (2004) investigaram se é possível fazer uma Análise Discriminante do desempenho das empresas com base nas informações divulgadas na Revista Exame Melhores & Maiores, alcançando boas perspectivas. Foram utilizados os dados de 56 empresas referente aos anos 1999 e 2000. As variáveis independentes foram: lucro líquido ajustado, ROE, endividamento geral, endividamento a longo prazo, vendas, patrimônio líquido e margem de vendas. A partir destas variáveis foi inferido o desempenho de 2000. O parâmetro de comparação foi o ROE de 2000 para classificar as empresas com bom desempenho ou não. Das variáveis independentes, as que apresentaram melhor capacidade de explicar o desempenho foram o endividamento geral e o logaritmo das vendas.

Também SALES e AGUIAR (2003) usaram o reconhecimento de padrão como ferramenta de apoio na tomada de decisões para investimento em ações do mercado financeiro, adotando a técnica *fuzzy clustering means* em empresas dos setores petroquímico, têxtil e energia no período de 1994 a 2002. A técnica aplicada a um conjunto de índices divulgados nas demonstrações financeiras trimestrais e anuais de empresas resultou numa separação das companhias em dois conjuntos de retorno financeiro, acima ou abaixo do produzido pelo Ibovespa, sem ajustes de risco.

A tese de doutorado de TAVARES (2010) analisou a aplicação da Análise Discriminante por meio de 23 indicadores no mercado acionário brasileiro entre 2005

e 2007. Dentre esses indicadores 14 são diferentes dos propostos na presente pesquisa: prazo de pagamentos a fornecedores, prazo de recebimentos, prazo de estocagem, giro do ativo, giro do patrimônio líquido, dívida financeira por ativo total, dívida financeira por patrimônio líquido, lucro operacional por dívida financeira, margem bruta, margem operacional, grau de alavancagem operacional, EBITDA por ação, lucro por ação e patrimônio líquido por ação. Os outros 9 são iguais: LI, LC, LS, PCTRT, GE, CP, ML, ROA e ROE.

As empresas foram separadas em grupo de Vencedoras e Perdedoras de acordo com o retorno de suas ações, com 50% em cada grupo e foram utilizadas funções discriminantes baseadas na regra do qui-quadrado mínimo, na função linear discriminante de Fisher e no modelo *logit* (Regressão Logística). O resultado aponta para a aplicabilidade da Análise Discriminante para a seleção de ativos, já que o sucesso de alocação dos ativos foi em torno de 60% e 70% nos três modelos, seja com o uso de todas as variáveis ou de somente as de maior poder discriminante, com os melhores resultados sendo dados pelo modelo *logit*. As variáveis que se mostraram significativas foram poucas, o que concede grande poder de síntese aos modelos, porém instáveis a cada ano, a saber, margem bruta (2005); prazo de recebimento, dívida financeira por patrimônio líquido e CP (2006); grau de alavancagem operacional (2007). Não foi realizado um estudo de carteira, nem aplicada as funções discriminantes de um ano para o período subsequente de forma a analisar a regra de alocação de maneira como seria possível de se proceder na prática.

CALDEIRA (2005) partiu do modelo de Markowitz para propor um modelo mais robusto, sem restrição de distribuição, com base no conceito de entropia. Seus resultados mostraram-se superiores aos da razão média-variância de Markowitz, inclusive sugerindo um novo índice média-entropia para ajuste ao risco.

O uso da entropia no mercado acionário brasileiro, de maneira próxima ao proposto nessa tese, foi observado em ROCHA, HEIN e KROENKI (2011), no qual

foi utilizada entropia de Shannon para avaliar os indicadores econômico-financeiros de empresas participantes dos níveis de governança corporativa da Bovespa entre os períodos de 2005 a 2009 do setor de materiais básicos. Entre os 14 indicadores de liquidez, endividamento, atividade e rentabilidade levantados, o que apresentou maior quantidade de informação foi o Retorno sobre Patrimônio Líquido (ROE) do ano de 2008. Em ROCHA (2010), dissertação que deu origem ao trabalho anteriormente citado, outros setores foram analisados, mas o maior destaque continuou sendo dos indicadores de rentabilidade. Entretanto, devido aos objetivos dessas pesquisas, não houve a inclusão de múltiplos de mercado para análise.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1 CARACTERIZAÇÃO DA POPULAÇÃO E DAS VARIÁVEIS UTILIZADAS

A amostragem dos dados deste estudo consiste em todas as empresas não-financeiras listadas na Bovespa negociadas no ano entre 1999 e 2009. A cada ano esse número oscila, mas o mínimo foi registrado em 2007 (332 empresas) e o máximo em 1999 (416 empresas). A exclusão do setor financeiro deve-se a padrões bastante diferentes em seus números contábeis em comparação com os outros setores econômicos, atitude frequentemente presente em trabalhos dessa natureza e, inclusive, proposta pelo próprio Graham (GRAHAM; DODD, 1951; GRAHAM, 2007).

Cogitou-se retirar o ano de 2008 do estudo em razão da crise do *subprime*, evento que talvez fugisse da normalidade da dinâmica do mercado acionário e, dessa forma, prejudicasse a aplicação de técnicas de reconhecimento de padrões ou deturpasse a interpretação das variáveis relativas e os resultados das carteiras montadas. Entretanto, a exclusão desse ano não traria melhorias nos modelos construídos e, mesmo dada sua magnitude incomum, a existência de crises parece ser uma tônica recorrente do mercado, ao menos no período analisado, no qual se pode identificar cinco crises num espaço de 11 anos: Nasdaq, Argentina, risco Lula, *subprime* e Zona do Euro.

O banco de dados da plataforma Economatica apresenta todas as informações contábeis das empresas negociadas em bolsa, retiradas dos documentos oficiais entregues à CVM e à Bovespa. Foi por meio desta plataforma que se levantou todos os dados necessários ao presente trabalho.

Ao se tomar um grande conjunto de dados contábeis para estudos dessa natureza, corre-se o risco de ter de se lidar com *accruals* (gerenciamento de resultados). Eles consistem em componentes que podem provocar alteração no lucro ou prejuízo, porém não influenciam o caixa do período, em razão das diversas

possibilidades contábeis, assim como a presença de notas explicativas, para se lançar valores nos balanços e demonstrações da companhia. Alguns estudos nacionais apontam para a significância de *accruals* impactando nos demonstrativos contábeis (COLAUTO e BEUREN, 2006; MARTINEZ, 2008). Todavia, SOUTES (2011) não encontrou diferença de retorno nos ativos negociados em bolsa pelas empresas dos setores de telecomunicações e de siderurgia e metalurgia entre aquelas que gerenciavam ou não seus resultados. Para proceder com a presente pesquisa, teve-se que assumir que esse impacto se dá da mesma forma, ou com a mesma variação aleatória, em todas as empresas da amostra. Um estudo mais pormenorizado envolve esmiuçar os balanços e demonstrativos contábeis de cada empresa.

Nesse processo de amostragem, há de se tomar cuidado também com o viés da sobrevivência. Muitas pesquisas partem de um universo de empresas de capital aberto existentes e retroagem no tempo para testar as estratégias de investimento. Essa situação pode criar um viés na medida em que elimina automaticamente as empresas que faliram durante o período pesquisado, as quais teriam óbvios reflexos negativos sobre a rentabilidade da carteira, superestimando o retorno da estratégia. Por isso, como feito nessa pesquisa, é necessário sempre usar como universo a ser amostrado o período inicial ao qual se aplica a estratégia.

E sobre esse ponto cabe ainda mais uma observação. Normalmente escolhe-se o último dia útil do ano como ponto de avaliação de um modelo de investimento; entretanto, quando se usam variáveis fundamentalistas, é preciso ter em mãos os dados contábeis do último ano fiscal. Esses dados são costumeiramente disponibilizados entre o final de fevereiro e março do ano seguinte. Por isso a data das carteiras montadas, que serviram para análise do modelo, foi o último dia útil de março de cada ano, data limite para as empresas apresentarem seus balanços. Todos os indicadores foram calculados com as cotações desta data.

São muitos os indicadores disponíveis e usados seja por pesquisadores seja



por profissionais da área. Como opção de trabalho e baseado na literatura existente selecionou-se alguns dos mais conhecidos e utilizados indicadores e suas respectivas variáveis, resumidos no Quadro 3.1.

QUADRO 3.1 – INDICADORES E VARIÁVEIS UTILIZADOS

INDICADORES	VARIÁVEIS
FINANCEIROS (retirados do Balanço Patrimonial)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Liquidez Geral (LG)</li> <li>• Liquidez Geral Modificada (LGM)</li> <li>• Liquidez Corrente (LC)</li> <li>• Liquidez Seca (LS)</li> <li>• Liquidez Imediata (LI)</li> <li>• Grau de Endividamento (GE)</li> <li>• Grau de Endividamento Modificado (GEM)</li> <li>• Garantia do Capital Próprio ao Capital de Terceiros (GCPCT)</li> <li>• Participação de Capitais de Terceiros sobre Recursos Totais (PCTRT)</li> <li>• Composição do Endividamento (CP)</li> </ul>
ECONÔMICOS (retirados da Demonstração de Resultado do Exercício)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Retorno sobre o Patrimônio Líquido (ROE)</li> <li>• Retorno sobre Ativos (ROA)</li> <li>• Retorno sobre o Capital (ROC)</li> <li>• Margem Líquida (ML)</li> <li>• Média de Crescimento dos Lucros por Ação (MCL)</li> <li>• Número de Anos com Lucros em Declínio (NALD)</li> </ul>
BURSÁTEIS (calculados a partir de múltiplos de mercado)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Preço de Mercado (PM)</li> <li>• <i>Dividend Yield</i> (DY)</li> <li>• Preço por Lucro (P/L)</li> <li>• Preço por Vendas (P/V)</li> <li>• Preço por Valor Contábil (P/VC)</li> <li>• Preço por Valor Contábil Tangível (P/VCT)</li> <li>• Preço por Capital de Giro Líquido (P/CGL)</li> </ul>

A variável NALD foi utilizada somente para os filtros de Graham, uma vez que faz parte das variáveis originais do filtro. Ela contabiliza o número de anos com lucro em declínio de 5% ou mais nos últimos dez anos, porém a maiorias das empresas brasileiras não possui dez anos de histórico e sua inclusão nas técnicas estatísticas multivariadas estabeleceria uma comparação artificial, motivo pelo qual foi excluída dos demais estudos.

A rentabilidade das carteiras foram medidas de três formas: o retorno logarítmico, o alfa de Jensen e o índice de Sharpe. O uso do retorno logarítmico, coerente com a literatura da área, ajusta a simetria dos retornos e é uma transformação

típica para o tratamento gaussiano dos dados. Para variações pequenas, seu valor é bastante próximo do retorno composto bruto<sup>12</sup>.

O alfa de Jensen se baseia no coeficiente beta do modelo CAPM para ajustar o retorno ao risco, nesse caso um valor significativamente positivo significa a existência de retornos excedentes na estratégia adotada. O índice de Sharpe se baseia no desvio padrão como medida de risco e a comparação com o índice do mercado pode indicar ou não uma maior rentabilidade da carteira.

### 3.2 ABORDAGEM DE CARTEIRA

Dentre as três maneiras básicas de se testar a eficiência de uma estratégia – estudo de evento, regressão e estudo de carteira, a opção pela última se deve a sua melhor adequação para avaliar um grande número de variáveis por um longo período de tempo. É o caso dessa investigação que levanta as 23 variáveis sintetizadas no Quadro 3.1, entre 1999 e 2009, e as normaliza para dar continuidade aos procedimentos.

Na Abordagem de Carteira parte-se da suposição de que há empresas que, por possuírem características específicas (como baixo P/L e alto ROC), têm maior probabilidade de serem subavaliadas e, portanto, apresentarem retornos excedentes em relação ao mercado. A estratégia para se identificar essas características é criar carteiras contendo ações somente das empresas portadoras das qualificações exigidas, no início do período considerado, e analisar seu retorno ao longo do tempo. Para assegurar que os resultados não sejam distorcidos por fatores atípicos de um determinado período e para lhe dar consistência estatística, a análise é repetida para vários períodos diferentes. Para todas as avaliações, o peso dos ativos na carteira foi distribuído de maneira uniforme e o tempo de manutenção dos portfólios foi de 1, 2, 3 e 5 anos. De forma a evitar distorções, as cotações de base diária foram ajustadas por

---

<sup>12</sup> As demonstrações dessas afirmações estão feitas no Apêndice 2.

proventos. A carteira de mercado adotada, como é comum em trabalhos dessa natureza, foi o Índice Bovespa. A taxa livre de risco foi tomada como a taxa Selic.

De posse dos medidores de rentabilidade para as carteiras, foi realizado o teste de Kolmogorov-Smirnov para Gaussianidade e o teste F para a diferença entre duas variâncias. Nos casos das premissas satisfeitas, o teste de hipótese utilizado para comparação da média das rentabilidades foi o teste t. Nos casos em que foi rejeitada a Gaussianidade dos dados, a comparação das médias foi feita pelo teste de Mann-Whitney. O nível de significância adotado foi sempre de 5%.

### 3.3 AVALIAÇÃO DOS FILTROS DE GRAHAM

Os Filtros de Graham não utilizam todas as variáveis levantadas para o período. Para testá-los, são necessárias apenas nove: P/L, DY, P/VCT, P/CGL, GEM, LC, LGM, MCL e NALD. Além dessas variáveis, foram necessários, ano a ano, a rentabilidade do título livre de risco e o P/L médio do mercado 5 anos anteriores ao ano analisado.

De posse desses dados, buscou-se montar carteiras com empresas que satisfizessem os critérios de Graham. Como o uso dos 10 critérios se mostrou extremamente restritivo, com apenas alguns anos contendo uma empresa selecionada, optou-se pela sugestão de LOWE (1997) de se trabalhar com ações que satisfaçam 7 dos 10 critérios, sem qualquer distinção de quais 7 critérios.

Visando uma melhor adaptação ao cenário nacional montou-se também carteiras de acordo com o quartil de cada filtro. Isso porque alguns qualificadores podem se mostrar por demais abrangentes ou por demais restritivos, para corrigir esse problema usou-se o quartil como medida separatriz. Somente as empresas que pertenciam ao quartil mais interessante de cada filtro foram selecionadas e, com isso montou-se uma estratégia que se julga mais adequada para o cenário nacional. Afinal, desse modo, não se analisa a magnitude do qualificador, que foi criado para o mercado

norte-americano de meados do século XX, mas uma adaptação ao mercado nacional atual, em busca de qualificadores próprios que respeitem a lógica por detrás dos critérios de seleção.

Montadas as carteiras e calculados os índices de rentabilidade, o primeiro passo foi testar a Gaussianidade dos dados. O teste de Kolmogorov-Smirnov, ao nível de significância de 5%, não permitiu rejeitar essa hipótese para nenhum dos conjuntos de dados analisados. Com esse resultado e a homogeneidade das variâncias também aceita pelo teste F pôde-se executar o teste t para a comparação dos resultados.

Além do objetivo claro de testar e se desenvolver uma estratégia de investimento adaptada ao mercado nacional, a avaliação dos Filtros de Graham é necessária porque as ideias de seu criador funcionam como alicerce teórico do restante do trabalho. Afinal, busca-se identificar padrões em meio a variáveis fundamentalistas, o diferencial consiste em utilizar, interpretar e elaborar técnicas de maneiras nunca antes observadas na literatura da área.

### 3.4 AVALIAÇÃO DA ANÁLISE FATORIAL

Para iniciar a Análise Fatorial foram levantadas 22 das variáveis presentes no Quadro 3.1, exceção à variável NALD, para todas as empresas listadas na Bovespa entre os anos de 1999 e 2009, por meio da plataforma Economatica. Quando ocorria da empresa possuir mais de uma ação sendo negociada, somente o papel com mais transações foi considerado. De posse dos dados, foi realizado o descarte de pontos atípicos (*outliers*) por meio do programa STATISTICA. O descarte foi feito através do método das duas primeiras componentes principais padronizadas, quando os escores apresentados fugiram ao intervalo de mais ou menos dois desvios padrões. Assim como para as demais estratégias, os ativos que não possuíam dados para todas as variáveis foram excluídos da amostra. Das 2083 observações restantes, 67 foram identificadas como *outliers* nessas condições e também retirados.

Na sequência, foram aplicados os testes de Bartlett e KMO por meio do *software* MATLAB R2009b para verificar a validade da Análise Fatorial. Os valores obtidos para ambos os testes, a cada ano, estão expostos no Quadro 3.2

QUADRO 3.2 – TESTES DE VALIDADE DA ANÁLISE FATORIAL

Ano	Teste de Bartlett ( <i>p-value</i> )	Medida de adequacidade KMO
1999	5,670 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5462
2000	7,578 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5848
2001	8,696 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5954
2002	7,593 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5124
2003	7,720 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5500
2004	7,720 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5533
2005	1,725 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5037
2006	3,249 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5439
2007	4,876 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5821
2008	3,0421 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,5065
2009	6,258 . 10 <sup>3</sup> (0)	0,6247

Fonte: Da análise com o MATLAB R2009b

Pela rejeição do teste de esfericidade de Bartlett (que testa a hipótese nula da matriz correlação ser a identidade) e pela medida de Kaiser-Meyer-Olkin maior que 0,5 para todos os anos, tem-se que a técnica é apropriada para os dados.

Foi realizada, então, a Análise Fatorial no programa Statistica 8.0 para os dados de cada ano, sendo usado o critério de Kaiser para a seleção dos fatores. Foi utilizada a rotação *Varimax* e calculadas as communalidades para cada variável, bem como os escores fatoriais das observações.

Com os autovalores e os escores fatoriais é possível calcular o escore bruto de cada observação e, dessa forma, ranquear os ativos de acordo com essa medida. Tal escore é, para isto, ponderado pelos autovalores de acordo com a equação 2.59.

Como os benefícios da diversificação ficam prejudicados pelos custos de transação a partir de cerca de dez a doze ativos (CERETTA e COSTA JR, 2000; OLIVEIRA e PAULA, 2007), foi feito um estudo de carteira com o portfólio composto dos doze ativos em ordem decrescente de escore, com cada um dos doze papéis correspondendo a 8,33% do valor da carteira. O estudo foi realizado para os prazos de um, dois, três e cinco anos.

A rentabilidade foi comparada através dos retornos logarítmicos, o índice de Sharpe e o alfa de Jensen pelo teste paramétrico t. Todos os testes estatísticos foram realizados no *software* Minitab 15 ao nível de significância de 5%. Nesse nível, a hipótese de gaussianidade e de homogeneidade dos dados não pode ser rejeitada para nenhuma variável.

Com isso, é possível identificar fatores responsáveis pela variabilidade dos dados e interpretá-los de modo a clarificar o funcionamento do mercado acionário brasileiro. A abordagem dos escores brutos também permite a construção de estratégias de investimento com base nos fatores identificados, solucionando o problema de baixa ou excessiva diversificação, oferecendo uma maneira até então inédita de se ranquear ativos.

### 3.5 AVALIAÇÃO DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ANÁLISE DISCRIMINANTE E REGRESSÃO LOGÍSTICA

De posse do levantamento de todas as variáveis e do descarte dos *outliers*, já realizados em etapas anteriores desse trabalho, se inicia a parte de reconhecimento de padrões. A construção do modelo de reconhecimento de padrões, de acordo com o explicitado nessa pesquisa, requer a existência de dois conjuntos discretos e diferenciáveis. A separação desses conjuntos se deu pela rentabilidade acima ou abaixo da de mercado apresentada pelos ativos. A verificação de que as populações são identificáveis, ou seja, apresentam médias significativamente diferentes, foi verificado pelo teste  $T^2$  de Hotelling após aceitação da hipótese de distribuição normal multivariada.

Há três indicadores disponíveis para se selecionar o grupo de rentabilidade acima ou abaixo da média de mercado: retorno logarítmico, índice de Sharpe e alfa de Jensen. A divisão foi feita com base nos três indicadores simultaneamente. Sempre que um ativo apresentava retorno logarítmico e índice de Sharpe superiores ao Índice

Bovespa e alfa de Jensen positivo no ano analisado, ele era alocado para o grupo de alta rentabilidade (Sucesso). Caso contrário, era alocado para o grupo de baixa rentabilidade (Fracasso). Como os dados contábeis são disponibilizados somente no ano seguinte ao que se referem, cabe exemplificar como são levantados os dados e medidos os índices de rentabilidade para se evitar confusões com os anos. Para a carteira de 2008, por exemplo, foram levantadas as 22 variáveis (excluída a variável NALD) no dia 31/03/2009 e os índices de rentabilidade, utilizados para a alocação nos grupos, foram calculados entre 31/03/2009 e 31/03/2010.

Após a separação dos ativos nos dois grupos, fez-se a verificação da diferença do vetor de médias entre as duas populações, de acordo com teste  $T^2$  de Hotelling descrito no tópico 2.2.3 do Capítulo II com hipótese nula de igualdade entre os vetores média. Esse teste foi repetido para cada um dos anos do período compreendido entre 1999 e 2009.

QUADRO 3.3 – TESTES  $T^2$  DE HOTELLING

Ano	Lambda de Wilks	<i>p-value</i>
1999	0,585972	0,000026
2000	0,759020	0,005264
2001	0,852704	0,115920
2002	0,901010	0,676382
2003	0,801453	0,036472
2004	0,845926	0,084816
2005	0,871171	0,191205
2006	0,767455	0,005671
2007	0,802852	0,037518
2008	0,880808	0,309248
2009	0,901780	0,618253

Fonte: Da análise com o STATISTICA 8.0

Ainda que a diferença entre os vetores média dos conjuntos classificados como sucesso e fracasso não possa ser considerada diferente para todos os anos, o modelo foi construído e, na sequência, avaliado. De modo alternativo, foi utilizado o método *forward stepwise*, no qual algumas variáveis não foram incluídas no modelo – o que pode favorecer a identificação e interpretação das variáveis, a separação dos grupos e, conseqüentemente, a eficiência das funções discriminantes.

QUADRO 3.4 – TESTES  $T^2$  DE HOTELLING PARA MODELO *FORWARD STEPWISE*

Ano	Quantidade de variáveis incluídas	Lambda de Wilks	<i>p-value</i>
1999	14	0,590628	0,000000
2000	6	0,781776	0,000001
2001	9	0,862613	0,001066
2002	3	0,965280	0,049084
2003	7	0,823822	0,000059
2004	4	0,872876	0,000034
2005	5	0,887949	0,000247
2006	7	0,817520	0,000019
2007	4	0,881922	0,000284
2008	6	0,905841	0,002686
2009	3	0,943123	0,009031

Fonte: Da análise com o STATISTICA 8.0

Os modelos de classificação, em suas formas originais com todas as variáveis e no método *forward stepwise* que inclui somente aquelas que acrescentavam ganho explicativo ao modelo (ao nível de significância de 5%), foi avaliado segundo a abordagem de Lachenbruch. Com isso, foram evidenciadas algumas variáveis como as mais relevantes para explicar a dinâmica de funcionamento do mercado acionário brasileiro ao longo dos anos, comparando-as, posteriormente, esse resultado com o apresentado pela Análise Fatorial e os filtros de Graham.

Após se testar a regra de classificação nos dados em que foi construída, o próximo passo foi construir carteiras e testá-la para o período seguinte. Isso porque para a montagem real de portfólios, não se dispõe, obviamente, de antemão da rentabilidade do ativo.

Ilustrando o procedimento, o modelo 1999 foi montado com os fundamentos contábeis de 1999, disponíveis no dia 31/03/2000 e com as empresas separadas nos grupos sucesso/fracasso em razão de suas rentabilidades entre 31/03/2000 e 31/03/2001. Com isso, pretende-se que a função discriminante esteja ajustada para apontar os melhores investimentos futuros assim que os dados contábeis são disponibilizados e esse ajuste é medido pela abordagem de Lachenbruch. Para a construção efetiva de portfólios na prática, a função discriminante de 1999 foi realimentado com os dados contábeis de 2000 – disponíveis no dia 31/03/2001 – e



avaliado entre 31/03/2001 e 31/03/2002. Essa carteira foi chamada carteira 2000. Com isso, avalia-se a regra de seleção em um período de tempo para o qual ela não foi originalmente construída e os resultados são avaliados por um novo estudo de carteira, nos mesmos moldes dos já executados anteriormente.

Da mesma forma que no realizado para a Análise Fatorial, os ativos podem ser ranqueados de acordo com a magnitude de resposta dos modelos, independente alocação em grupos. Com isso, essas duas técnicas também permitem selecionar sempre a quantidade desejada de ativos para se compor um portfólio. Novamente, os resultados decorrentes dessa forma de construção de portfólios são verificados por um estudo de carteira.

### 3.6 AVALIAÇÃO DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ÁRVORES DE DECISÃO

Foram usados os mesmos grupos Sucesso e Fracasso já descritos na Análise Discriminante e na Regressão Logística e utilizado o mesmo padrão para a nomenclatura dos modelos e das carteiras.

Para a construção das árvores de decisão foi utilizado o algoritmo C4.5 (QUINLAN, 1993) implementado no pacote WEKA 3.4.11. O algoritmo original (J58) faz uso da entropia de Shannon na elaboração da árvore e um algoritmo para uso da entropia de Rényi foi desenvolvido por LIMA, ASSIS e SOUZA (2010) e gentilmente cedido para aplicação na presente pesquisa. O modelo foi compilado com  $\alpha = 2$  para a entropia de Rényi (quadrática),  $\alpha = 1$  (entropia de Shannon), com pós-podagem pelo método *error based pruning* e utilizando a regra de Silvermann para a estimação da janela de Parzen no cálculo da informação mútua.

Após identificar-se as variáveis explicativas, procedeu-se com a avaliação dos dois modelos (Rényi e Shannon) pela abordagem Lachenbruch e os resultados foram comparados com os obtidos pela FDLF e pelo MRLM. Por fim, as árvores

construídas para o ano  $t$  foram utilizadas para classificação dos ativos no ano  $t+1$ , gerando mais dois estudos de carteira.

### 3.7 AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA DO MERCADO

Os testes de eficiência do mercado avaliam se uma determinada estratégia de investimento consegue uma rentabilidade, ajustada ao risco, acima da rentabilidade do mercado. Neste trabalho essas medidas são o índice de Sharpe e o alfa de Jensen, mas existem vários outros indicadores e modelos de precificação, como Índice de Informações,  $M$  ao Quadrado, Índice Treynor, o Modelo de Precificação por Arbitragem (APM) e outros. A escolha desses dois deve-se a sua popularização e por usar duas das medidas mais aceitas de risco, que são o desvio padrão e o modelo de precificação CAPM.

Se o alfa de Jensen para uma estratégia mostrar-se significativamente superior a zero, significa que a estratégia supera a rentabilidade do mercado com ajuste ao risco do modelo CAPM. A Hipótese de Mercado Eficiente (HME) em sua forma semiforte afirma que a posse de informações públicas não deve alterar o retorno de uma estratégia em relação ao retorno ajustado ao risco observado no mercado. Dentro da estratégia adotada, um alfa de Jensen significativamente positivo é contrário a essa afirmação.

O mesmo ocorre com o Índice Sharpe, que usa o desvio padrão como medida de risco. Caso o índice de uma estratégia mostre-se superior ao índice do mercado está se contrariando a HME.

Portanto, em um mercado ineficiente no que se refere a sua forma semiforte, pode-se usar informações publicamente disponíveis para identificar ações que estejam sub ou superavaliadas e negociá-las para obter retornos consistentemente maiores do que seriam obtidos em uma carteira aleatoriamente selecionada e de risco equivalente.

Todavia, muitos são os cuidados com essas conclusões. O primeiro é que um

teste de eficiência de mercado tanto testa a eficiência de mercado como testa a eficácia do modelo utilizado para calcular os retornos esperados. Ou seja, quando surge uma evidência de retornos excedentes em um teste de eficiência de mercado, isto tanto pode ser um indicativo de que os mercados são ineficientes quanto pode indicar que o modelo utilizado para calcular os retornos esperados está errado, ou ambos. Embora essa situação possa parecer um dilema inescapável, se as conclusões de um estudo forem confirmadas por vários modelos e para vários períodos, é muito mais provável que os resultados estejam sendo gerados devido a verdadeiras ineficiências do mercado do que a má especificação do modelo.

Os próprios modelos utilizados para calcular os retornos esperados possuem vieses dos quais o pesquisador precisa estar consciente. O uso do retorno logarítmico tem um viés em direção a estratégias de alto risco, o índice de Sharpe possui tendência de penalizar carteiras que não sejam bem diversificadas, o modelo CAPM tende a subestimar o risco de ações menos negociadas e assim por diante (DAMODARAN, 2006a; COSTA JR; NEVES, 2000). Por isso, não deve ser usado apenas uma medida isolada de rentabilidade para se testar uma estratégia e, como consequência, a eficiência dos mercados. De certa maneira, as três medidas aqui utilizadas são complementares, visto que possuem diferentes vieses, justificando suas escolhas.

Por fim, a comparação das diversas estratégias testadas (filtros de Graham, Análise Fatorial, Análise Discriminante, Regressão Logística e Árvores de Decisão) diante da Hipótese de Mercado Eficiente, também fornece fortes indícios acerca da existência ou não de ineficiências e, portanto, oportunidades de ganhos consistentes no mercado acionário brasileiro.

### 3.7 RECURSOS UTILIZADOS

O levantamento dos dados foi feito a partir dos dados disponíveis pela CVM – <http://www.cvm.gov.br> – e pela Bovespa – <http://www.bovespa.com.br> –

reproduzidos pela plataforma Economatica.

Essa plataforma possui várias ferramentas facilitadoras para o cálculo de variáveis e seleção de ativos. O módulo *Valuation* (DCF) apresenta os dados históricos e as médias setoriais e históricas necessárias, o módulo *Stock Guide* permite o processo de busca por critérios definidos pelo usuário, como identificar ações que possuam *Dividend Yield* acima de 6%, ROE acima de 15% e Liquidez Geral inferior a 0,6, por exemplo. O sistema também permite a conversão dos preços em outras moedas e sua correção pelos índices de inflação IPCA e IGP-M e o ajuste dos preços por desdobramentos, dividendos e outros proventos, podendo exportar todos os resultados para *softwares* de planilha eletrônica, como o EXCEL, utilizado nessa pesquisa. Todos os cálculos necessários para contabilizar as medidas de rentabilidade da carteira foram efetuados nesse programa.

A Análise Fatorial, a Análise Discriminante, a Regressão Logística e a classificação de Lachenbruch foram executadas no *software* STATISTICA 8.0. O cálculo das entropias e a construção e avaliação das Árvore de Decisão foram realizados no pacote WEKA 3.4.11. Os testes estatísticos necessários foram executados no programas MINITAB 15 e MATLAB R2009b.

## 4 RESULTADOS E ANÁLISES

### 4.1 RESULTADOS DOS FILTROS DE GRAHAM

Como esperado, a utilização direta dos filtros de Graham se mostrou bastante restritiva quando aplicados sem adaptações ao mercado acionário brasileiro. Isso ocorre por basicamente dois motivos, o primeiro é por tratar da realidade da economia norte-americana e qualificadores adequados à sua época e contexto de risco e crescimento; o segundo é devido ao tamanho do mercado acionário dos dois países, enquanto na Bolsa de Nova York existe mais de 4000 empresas listadas, no Brasil esse número está em torno de 400, tornando bastante complicada a montagem de uma carteira diversificada por parte do investidor.

O número total de empresas listadas ano a ano e o número de empresas que passavam em cada um dos filtros de Graham podem ser vistos no Quadro 4.1.

QUADRO 4.1 – QUANTIDADE DE EMPRESAS QUE SATISFAZEM CADA FILTRO DE GRAHAM

Ano	Número de empresas que satisfazem o filtro										Total de Empresas
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1999	13	132	150	132	7	190	61	27	268	265	416
2000	30	93	148	136	9	176	75	34	265	229	413
2001	21	106	149	137	8	153	70	27	245	215	396
2002	6	118	136	111	4	148	66	27	225	176	378
2003	17	81	151	87	2	153	63	24	212	148	382
2004	5	67	167	80	3	151	67	24	218	135	379
2005	10	68	167	69	3	149	71	30	203	137	403
2006	3	63	169	61	0	166	100	36	204	157	406
2007	4	82	202	51	1	186	122	50	225	174	332
2008	24	97	202	79	1	123	88	26	186	151	396
2009	28	161	184	111	3	68	96	25	169	137	342
Média	15 3,8%	97 25,2%	166 43%	96 24,8%	4 1%	151 39,2%	80 20,7%	30 7,8%	220 57%	175 45,3%	386

Fonte: Economatica

Em destaque estão os três filtros com condições mais restritivas. O motivo de o primeiro filtro selecionar tão poucas empresas se deve ao fato de que a taxa de juros básicas da economia brasileira é bastante elevada e seu uso como se fosse um título livre de risco AAA pode não ser adequado. O oitavo filtro seleciona empresas que

tenham um capital de giro suficiente para cobrir o dobro de suas dívidas totais, algo raro de ocorrer no contexto nacional, sendo esse um resultado dentro do esperado. O quinto filtro é de fato o mais restritivo dos filtros de Graham, pois significa que o preço das ações da empresa tem que estar abaixo das disponibilidades de curto prazo que a empresa possui após pagar todas as suas dívidas. Em outras palavras, seria o equivalente a comprar a empresa sem atribuir valor nenhum aos seus ativos imobilizados, ao poder de sua marca etc. O uso desse indicador rigoroso já foi fruto de amplos estudos anteriores de VU (1988) e LAUTERBACH e VU (1993) que mostraram que seu uso no mercado acionário norte-americano continua gerando retornos anormais nas décadas de 1970 e 1980, complementando os estudos de GRAHAM (2007) que mostravam o mesmo resultado na década de 1950.

Por outro lado, o filtro 9 parece ser bastante tolerante para o mercado nacional. Esse critério trata de um crescimento dos lucros superior a 7%, indicando que para um mercado emergente, talvez essa taxa deveria ser maior uma vez que o crescimento do PIB brasileiro tem sido frequentemente superior ao crescimento do PIB dos Estados Unidos.

Computando-se o número de empresas que satisfazem 7 critérios ano a ano, chegou-se aos valores do Quadro 4.2, que mostram como fica prejudicada a construção de carteiras diversificadas usando sete filtros. Nenhuma empresa negociada satisfaz ao mesmo tempo os 10 critérios. A seguir tem-se o Quadro 4.2.

QUADRO 4.2 – EMPRESAS QUE SATISFAZEM SETE FILTROS DE GRAHAM A CADA ANO

Ano	Empresas que satisfazem 7 filtros
1999	7 (BDLL4, ECPR4, CGRA4, MAGS5, SGEN4, TKNO4, UNIP6)
2000	11 (ALBA3, ECPR4, FJTA4, CGRA4, ROMI3, MAGS5, MTSA4, PLTO6, SCAR3, SPRI3, TKNO4)
2001	13 (BDLL4, DOHL4, FESA4, FJTA4, IGBR3, GRNL4, ROMI3, MAGS5, SCAR3, SOND6, SPRI3, TCNO4, TKNO4)
2002	6 (BDLL4, ECPR4, MAGS5, SCAR3, SPRI3, TKNO4)
2003	3 (SCAR3, SGEN4, TKNO4)
2004	0
2005	1 (DOHL4)
2006	1 (ECPR4)
2007	0
2008	9 (AGRO3, CRDE3, DOHL4, EZTC3, FESA4, LPSB3, PFRM3, CTSA3, SGAS4)
2009	7 (AGRO3, EZTC3, KROT11, LPSB3, PEAB4, PFRM3, CTSA3)

Fonte: Economatica

Pelo Quadro 4.2, percebe-se que as carteiras montadas com os ativos que satisfazem sete dos filtros sofreram com a baixa diversificação, em especial nos momentos de alta do mercado, pós 2002. No Quadro 4.3 constam os valores de retorno (sempre logarítmico) e seu comparativo com o Índice Bovespa para cada ano, para o caso da carteira alterada anualmente.

QUADRO 4.3 – RETORNO LOGARÍTMICO ANUAL DE CADA CARTEIRA

Ano	Carteira	Ibovespa
1999	35,62%	-21,05%
2000	21,67%	-8,56%
2001	43,60%	-16,19%
2002	60,75%	67,51%
2003	3,32%	18,38%
2004	0%	35,50%
2005	47,00%	18,81%
2006	112,53%	28,60%
2007	0%	-39,86%
2008	90,17%	55,50%
2009	21,10%	0,81%
<b>Média dos Retornos</b>	<b>39,61%</b>	<b>12,37%</b>

Fonte: Autor

Não é necessário trocar totalmente a carteira anualmente, pode-se optar por investimentos de prazos maiores nos quais se mantém as ações adquiridas pelos próximos dois, três ou cinco anos antes de se desfazer das posições assumidas. Inclusive o investimento de longo prazo é uma das premissas de investimento para Graham. Os resultados do caso anterior e também os de prazos maiores estão dispostos

no Quadro 4.4.

QUADRO 4.4 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – FILTROS DE GRAHAM

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p)
1 ano	*39,61%	12,37%	*0,1056	0,0053	173,61%
2 anos	55,05%	29,32%	*0,0597	0,0067	*54,55%
3 anos	70,43%	45,10%	*0,0434	0,0046	*65,33%
5 anos	118,3%	92,49%	*0,0568	0,0098	*111,62%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

Nenhum dos dados apresentarem problemas com as premissas do teste t de Student. A sua aplicação mostrou que o retorno logarítmico de um ano e os índices de Sharpe de todos os períodos foram significativamente superiores para a estratégia formada em relação ao Ibovespa. O alfa de Jensen foi superior a zero para todos os períodos, exceto para a carteira de um ano. O motivo estatístico é a alta variabilidade do alfa de Jensen para esse período, visto que em alguns momentos nenhum ativo fez parte da carteira e, em outros, somente ativos de baixa liquidez, o que normalmente implica um coeficiente beta baixo para a carteira e um alfa elevado.

Ainda assim, esses resultados sugerem que o uso dos filtros propostos são capazes de produzir um retorno acima da média do mercado tanto no que se refere às medidas de ajuste de risco, quanto no caso do retorno logarítmico para as carteiras refeitas anualmente.

É importante notar que os períodos de baixa diversificação da carteira correspondem aos períodos de alta mais intensa do mercado, período que se inicia em 2002 e irá cessar somente em 2007. Nesses cenários, os filtros originais de Graham encontram dificuldades em selecionar empresas com múltiplos de preço baixo, o que pode ser traduzido como empresas “baratas”.

Da maneira com que foi construído, com qualificadores absolutos, não é



possível selecionar as “mais baratas” entre as existentes em determinado cenário. Justamente por esse motivo, propôs-se o uso de novos qualificadores para os filtros, melhor adaptados ao mercado nacional, através do uso dos quartis como medida separatriz de cada filtro.

Da mesma forma como ocorre com os filtros originais de Graham, não houve um número suficiente de empresas que estivessem simultaneamente nos dez quartis mais interessante de cada filtro para que se procedesse com a avaliação das carteiras. Por isso, optou-se por construir carteiras que estavam em pelo menos sete dos quartis mais interessante de cada critério, seguindo o raciocínio de LOWE (1997).

Com essa abordagem, foram alterados os filtros dos qualificadores. Como os fundamentos contábeis das empresas variam ano a ano, os quartis também variam anualmente, mas uma média do período estudado fornece os seguintes valores para os filtros de Graham:

1. Lucro/preço maior que 0,78 vezes da taxa básica de juros;
2. Preço/lucro menor que 89% da mediana do mercado nos últimos 5 anos;
3. Taxa de dividendos maior que 29% da taxa básica de juros;
4. Preço por Valor Contábil Tangível menor que 0,73;
5. Preço por Capital de Giro Líquido menor que 25,7;
6. Dívida por Valor Contábil Tangível menor que 0,97;
7. Ativo Circulante por Passivo Circulante maior que 1,8;
8. Dívida por Capital de Giro Líquido menor que 15,35;
9. Crescimento do lucro por ação maior do que 6,86% durante os últimos 10 anos;
10. Não mais do que um ano de lucro em declínio de 5% ou mais nos últimos 10 anos.

No entanto, é importante não usar indistintamente as médias aqui apresentadas. A medida separatriz varia de ano a ano justamente para refletir

condições econômicas e alterações na dinâmica de funcionamento do mercado. Por isso, os resultados aqui apresentados são válidos com os quartis sendo calculados para cada ano. Nessa estratégia, busca-se valores mais adequados à realidade brasileira, de alta taxa básica de juros e diferenciado contexto de crescimento e endividamento por parte das empresas. Além dos qualificadores, foi feita uma alteração na medida utilizada no 2º filtro. Usou-se a mediana, ao invés da média, para evitar distorções provocadas por valores extremos na hora do cálculo dessa estatística.

A primeira contribuição dessa abordagem é que os filtros assumem todos o mesmo rigor, evitando-se filtros pouco exigentes, pelos quais a maioria das empresas passavam, e filtros extremamente restritivos, nos quais menos de 5% das empresas eram selecionadas. A construção das carteiras baseadas nos qualificadores advindos dos quartis praticamente eliminou o problema da baixa diversificação, selecionando no mínimo sete empresas para comporem o portfólio. Os Quadros 4.5 e 4.6 a seguir, sintetizam as carteiras formadas com base nesses.

QUADRO 4.5 – EMPRESAS QUE SATISFAZEM PELO MENOS SETE CRITÉRIOS COM BASE NOS QUALIFICADORES MODIFICADOS

Ano	Empresas que satisfazem os filtros com base nos quartis
1999	11 (ALPA4, BOBR4, LITS3, ECPR4, ETER3, FESA4, FJTA4, CGRA4, MAKR3, TKNO4, TELB4)
2000	11 (ALBA3, ALPA4, BDLL4, FJTA4, CGRA4, ROMI3, MAGS5, MTSA4, PLTO6, SPRI3, TKNO4)
2001	11 (BDLL4, ETER3, FESA4, FJTA4, GRNL4, ROMI3, SOND6, SPRI3, TCNO4, TKNO4, TELB4)
2002	7 (BDLL4, GRNL4, ROMI3, MAGS5, LEVE4, SCAR3, TKNO4 )
2003	18 (ALBA3, APTI4, ALPA4, CIQU4, ICPI3, FJTA4, ROMI3, MAGS5, LEVE4, MTSA4, MOAR3, PATI4, PTPA4, SCAR3, SGEN4, TKNO4, TNEP3, TPEC6B)
2004	11 (ECPR4, FJTA4, CGRA4, ROMI3, CTKA4, MRSL4, PATI4, PLTO6, TKNO4, TPEC6B, SGAS4)
2005	9 (CEDO4, FESA4, ROMI3, MOAR3, PLTO6, SGEN4, SOND6, TKNO4, UOLL4)
2006	9 (BDLL4, CTAX4, ECPR4, FESA4, MAGS5, MTSA4, MOAR3, SOND6, TKNO4)
2007	4 (ELEK4, MOAR3, TKNO4, SGAS4)
2008	36 (AVIL3, AFLU3, BEMA3, BBRK3, CNFB4, CSMG3, CRDE3, CREM3, DOHL4, ELEK4, ECPR4, ETER3, EVEN3, EZTC3, FESA4, CGRA4, GRND3, GUAR3, ITEC3, KROT11, LOGN3, MTSA4, MPXE3, MRVE3, PATI4, PEAB4, PMAM3, POSI3, PFRM3, RDNI3, CTSA4, SLED4, TCSA3, TKNO4, TEND3, SGAS3)
2009	12 (CRDE3, CREM3, ECPR4, EZTC3, FESA4, IGTA3, KROT11, PEAB4, PFRM3, RSID3, CTSA4, SGAS3)

Fonte: Economatica

QUADRO 4.6 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – FILTROS DE GRAHAM COM QUALIFICADORES MODIFICADOS

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	*39,78%	12,37%	*0,0975	0,0053	*25,81%
2 anos	*68,81%	29,32%	*0,0737	0,0067	*40,93%
3 anos	*91,01%	45,10%	*0,0610	0,0046	*49,66%
5 anos	137,16%	92,49%	*0,0570	0,0098	*76,60%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

Fonte: Autor

Novamente não houve problemas com as premissas do teste t. O resultado é que a estratégia se mostrou significativamente superior ao mercado em todas as medida utilizadas, menos o retorno logarítmico da carteira com período de 5 anos. De forma que o uso dos quartis se mostrou uma excelente ferramenta para a seleção de portfólio no mercado nacional.

A comparação da rentabilidade entre a estratégia original e o uso dos quartis, apesar de não ser estatisticamente significativa, aponta para uma superioridade dos qualificadores modificados em todos os períodos no que se refere ao retorno logarítmico. O índice de Sharpe também é maior em quase todos os períodos. Por outro lado, o alfa de Jensen é inferior em todos os períodos. Esse último resultado não é de se espantar, uma vez que esse indicador tem como viés supervalorizar justamente portfólios pouco diversificados, como foi o caso da estratégia original. Não obstante, é fundamental notar que todos os alfas da segunda estratégia foram significativos, enquanto na primeira, mesmo com a larga vantagem numérica, a variância dessa medida de retorno fez com que ela não fosse significativamente positiva em todos os períodos. Esses resultados são positivos para apontar a aplicabilidade da abordagem de quartis ao cenário brasileiro.

A observação dos Quadros 4.4 e 4.6 também deixa claro que as medidas de

rentabilidade decrescem quando o período de manutenção dos ativos se alonga. Em termos anualizados, com os qualificadores originais ou os quartis, a estratégia de carteira refeita anualmente foi a que apresentou maiores vantagens, apesar do problema de diversificação para os filtros originais.

Isso pode representar dois fatores. O primeiro é o caráter dinâmico do mercado, que reconhece com relativa velocidade empresas “boas e baratas”, ajustando seus preços no período de um ano e diminuindo os ganhos do portfólio quando esses ativos são mantidos por tempos maiores. O outro fator é o funcionamento e eficiência dos próprios filtros que, caso uma empresa ainda esteja sendo subavaliada, continua selecionando-a para nas próximas avaliações. É o caso, por exemplo, da empresa Bardella (código BDLL4), que compôs três vezes em sequência a carteira anual dos filtros modificados.

Diante das medidas de rentabilidade e do funcionamento do mercado e da seleção de ativos, a escolha mais acertada para o período de manutenção de portfólio é o de 1 ano e com o uso dos filtros modificados. Tal conclusão se deve a características do mercado, a superioridade e estabilidade das medidas de rentabilidade e a dinâmica de funcionamento desta estratégia, incluindo seu poder de diversificação.

Todavia, a seleção de muitos ativos para um portfólio pode esbarrar no problema contrário, que são os custos de transação dos ativos se tornarem altos a ponto de eliminarem as vantagens da diversificação. Investidores de portes diferentes possuem custos de transação diversos, mas para o público em geral, artigos têm mostrado que o equilíbrio entre vantagens de diversificação e custos de transação se dá entre 10 e 12 ativos na carteira (CERETTA e COSTA JR, 2000; ASSAF NETO, 2006; OLIVEIRA e PAULA, 2008). Como essa estratégia exige uma movimentação mínima dos ativos, tal problema ainda é minimizado para todos os tipos de investidor.

Portanto, a proposição dos filtros de Graham se mostra válida, trazendo indícios de que realmente possam existir dados observáveis nos fundamentos contábeis

das empresas que permitam que elas sejam selecionadas visando uma rentabilidade superior a do mercado.

Além disso, trata-se de uma inovação de aplicação absolutamente factível por profissionais da área e relativamente fácil de ser utilizada também por parte do pequeno investidor pessoa física. Desse modo, o desenvolvimento de filtros adequados ao mercado acionário brasileiro, de fácil utilização mesmo para o pequeno investidor pessoa física, constitui-se como uma das principais contribuições dessa tese. Afinal, não há, ao menos na bibliografia pesquisada, nenhuma proposta com tantos resultados de sucesso e simplicidade de execução como a do modelo apresentado.

Ainda assim, pode-se buscar refinamentos dessa estratégia. A atribuição de pesos maiores a alguns filtros ou o relaxamento de alguns critérios ainda pode ser um caminho interessante de pesquisa, que envolve a área de lógica *fuzzy* e de programação multicritério (*goal programming*) visando promover uma otimização ainda maior da estratégia. Isso porque elas podem oferecer critérios de flexibilidade dos parâmetros de maneira diferente da alcançada com o uso de medidas separatrizes como os quartis. Além disso, o campo de programação matemática ainda pode oferecer uma otimização no peso que cada ativo ocupa no portfólio.

Por outro lado, ao invés de se investigar qualificadores para os filtros, pode-se buscar a aplicação de ferramentas matemáticas e estatísticas da área de reconhecimento de padrões, particularmente as técnicas de Análise Multivariada e o uso da Teoria da Informação, na construção de estratégias de investimento. Propostas nesse sentido são apresentadas a seguir.

## 4.2 RESULTADOS DA ANÁLISE FATORIAL

A Análise Fatorial, permitiu reduzir e organizar os diversos indicadores do modelo de múltiplos em basicamente 8 fatores explicativos que dão conta, em média, de 77,89% da variabilidade dos dados. No Quadro 4.7 estão todas as variáveis com

peso absoluto superior a 0,70 nos fatores que cumpriram o critério de Kaiser a cada ano.

QUADRO 4.7 – PRINCIPAIS VARIÁVEIS PRESENTES EM CADA FATOR

Ano	Fator 1	Fator 2	Fator 3	Fator 4
1999	LS, LC, LI, LGM	GE, GEM	ROA, ROC, ROE	P/VCT, P/VC
2000	LS, LC, LI, LGM	P/VCT, P/VC	ROA, ROE	GE, GEM
2001	LS, LC, LI	P/VCT, P/VC	ROA, ROC, PCTRT	GEM, GE, ROE
2002	LS, LI, LC	P/VCT, P/VC, ROE, GE	ROA, PCTRT	GCPCT, LG
2003	LS, LC, LI, LGM, LG	P/VCT, P/VC	PCTRT, ROA	GEM, GE
2004	LS, LI, LC	ROC, ROA, ROE	ML, P/V	GE, GEM
2005	LS, LC, LI	P/VCT, P/VC	P/V, ML	PCTRT, ROA
2006	LS, LC, LI	ROA, PCTRT, ML	P/VCT, P/VC	LGM, CP, LG
2007	LS, LC, LI	ROA, ML, P/V, PCTRT	P/VC, P/VCT	CP, LGM, LG
2008	LS, LC, LI	GEM, P/VCT, GE	PCTRT, ROA	ML, P/V
2009	LS, LC, LI	GEM, GE, P/VCT, ROE, P/VC	ROA, PCTRT, ML, P/V	LG, GCPCT

Ano	Fator 5	Fator 6	Fator 7	Fator 8	Fator 9
1999	P/V, ML	CP	P/CGL, PM	MCL	
2000	P/V, ML	CP	P/CGL	MCL	
2001	P/V, ML	CP, LG, GCPCT	PM, P/CGL	nenhuma relevante	
2002	P/V, ML	P/L, PM	GEM	CP	MCL
2003	P/V, ML	CP	MCL	ROC, ROE	P/L
2004	CP, LGM, LG	P/VC, P/VCT	DY	nenhuma relevante	
2005	GE, GEM	CP	MCL	ROC	
2006	ROE, ROC	GEM	MCL	nenhuma relevante	
2007	ROE, GE	P/CGL	DY	-	
2008	CP, LGM, LG	P/VC, ROE	P/CGL	nenhuma relevante	
2009	P/CGL, PM	ROC	P/L	MCL	

Fonte: Statistica 8.0

Em geral, oito fatores satisfizeram o critério de Kaiser. Somente em 2007, quando sete fatores foram selecionados, e 2002 e 2003 com nove fatores, essa quantidade foi alterada. A observação do Quadro 4.7 também mostra uma permanência de algumas variáveis constituindo fatores que pouco mudaram ao longo dos anos. Esses fatos indicam uma estabilidade tanto nos fatores quanto nas variáveis necessárias para avaliar os ativos. Isso torna válido buscar uma interpretação de caráter geral para de tais fatores.

Ainda que para se analisar as empresas de um ano seja preciso utilizar os

fatores encontrados naquele ano, a estabilidade das variáveis dentro dos fatores indica uma possível interpretação comum ao longo dos anos analisados. Nessa linha, o fator 1 remete claramente a um indicador de liquidez da empresa, tendo como variáveis mais relevantes a Liquidez Seca (LS), Liquidez Corrente (LC) e Liquidez Imediata (LI). Os índices de liquidez são utilizados para avaliar a capacidade de uma empresa honrar seus compromissos de curto e de longo prazo. Nesse fator, contudo, estão evidenciados somente os compromissos imediatos e de curto prazo. O que retrata a capacidade de pagamento das dívidas de curto prazo como fator mais importante para diferenciar as empresas. Ele explica, sozinho, 17,21% da variabilidade dos dados.

O segundo fator é um pouco menos evidente, mas as variáveis que mais se destacam são o Preço por Valor Contábil Tangível (P/VCT) e o Preço por Valor Contábil (P/VC). De maneira que ele pode ser interpretado como um indicador de Preço de Mercado. Esses múltiplos são de aplicação comum no mercado para identificar ações sobre ou subavaliadas e sua importância no mercado nacional já foi ressaltada por COSTA JR e NEVES (2000) e NAGANO, MERLO e SILVA (2003). Esse fator, isoladamente, retrata em média 12,79% da variância.

O terceiro fator pode ser entendido como um indicador de rentabilidade. Ele está baseado principalmente no retorno sobre os ativos (ROA) e no Retorno sobre o Patrimônio Líquido (ROE). Ambos têm como função medir a capacidade da empresa de gerar lucro, seja em comparação com seu valor contábil, seja em comparação com os ativos que possui. Esse fator representa 10,36% da variabilidade encontrada. Já em ROCHA, HEIN e KROENKE (2011) e ROCHA (2010) os indicadores de rentabilidade, em especial o ROE, porém aplicados somente ao setor de materiais básicos, tinham sido apontados como os de informação mais relevante, entretanto não foram analisados múltiplos de mercado.

O quarto fator, de maneira geral, é composto pelas variáveis Grau de Endividamento (GE) e Grau de Endividamento Modificado (GEM). Pode ser

interpretado como um indicador da dívida da empresa, uma vez que comparam a dívida total da empresa com seu patrimônio líquido total ou tangível. 9,68% da variância é explicada por esse fator.

Nesses quatro primeiros fatores, concentra-se 50,04% da variabilidade dos dados. É esclarecedor observar que os quatro fatores referem-se a aspectos diferentes da empresa. Um diz respeito à sua capacidade de pagar dívidas no curto prazo, o segundo sobre seu preço, o terceiro sobre sua rentabilidade e o último sobre o tamanho de sua dívida. Do ponto de vista da Análise Fundamentalista, esses quatro pólos são fundamentais para o bom desempenho de um papel no longo prazo.

Exemplificando, empresas costumam ser negociadas com baixos múltiplos de mercado (P/VC, P/VCT, P/L, P/V) quando sua expectativa de crescimento é baixa, sua dívida é alta, sua capacidade de honrar compromissos é questionável ou ela é pouco lucrativa. A combinação dos quatro primeiros fatores dá conta de praticamente todos esses problemas, uma vez que permite observar companhias cujas ações estão baratas do ponto de vista dos múltiplos do mercado, mas ao mesmo tempo apresentam alta rentabilidade, alta capacidade de cumprir seus compromissos de curto prazo e composição pequena de sua dívida em comparação com seu patrimônio.

O quinto fator é composto pelas variáveis Preço por Vendas (P/V) e Margem Líquida (ML). O P/V é um múltiplo do mercado que ainda não havia se mostrado relevante em nenhum estudo nacional. A Margem Líquida, também inédito na literatura brasileira, é uma medida de rentabilidade que reflete a lucratividade da empresa em relação às suas vendas. Combinadas, elas constituem um fator que pode ser interpretado como a rentabilidade e a precificação da receita líquida da companhia. 8,38% da variância estão contidos nesse fator. Porém, em alguns anos, esse fator também foi composto pelo conjunto de outras três variáveis: CP, LGM e LG. Além de ressaltar que a análise deve ser feita ano a ano, essas variáveis enfatizam a variabilidade sendo explicada em termos da estrutura da dívida e a capacidade de



pagamento da empresa. Entretanto, o índice Composição do Endividamento foi mais frequente como variável incorporada ao sexto fator.

Os três últimos fatores são um pouco mais variáveis ao longo dos anos, porém é possível se determinar seus componentes mais frequentes. Nesse sentido, o sexto fator se deve, como dito, à variável Composição do Endividamento (CP). Ele é um indicador que mostra a participação do endividamento de curto prazo diante de toda a dívida da companhia, funcionando como uma medida da estrutura de capital da empresa. Consoante com o primeiro fator, novamente está relacionado aos compromissos de curto prazo. Em média, esse fator explica 8,10% da variabilidade dos dados.

O sétimo fator também é derivado de um múltiplo de mercado, o Preço por Capital de Giro Líquido (P/CGL). Esse múltiplo, apesar de pouco utilizado, é fundamental também nos filtros de Graham. Trata-se de uma modificação dos múltiplos P/L, P/V e P/VC, mas que não é tendencioso em relação às dívidas da empresa, pois envolve somente seu capital de giro líquido, entendido como o ativo circulante menos a dívida total da companhia. A variância contida nesse fator é de 5,58%.

O último fator relevante engloba a Média de Crescimento dos Lucros (MCL). Essa é uma variável que, em alguns momentos, esteve presente também no sétimo fator, ainda que de forma alternada e menos frequente que o P/CGL. O MCL trata-se de um indicador de crescimento da companhia, uma vez que mostra a evolução média dos lucros por ação nos últimos cinco anos. Mesmo não sendo tão relevante quanto os demais fatores, ele completa a os aspectos comumente adotados para a seleção de empresas promissoras: negociadas a baixos preços, financiada conservadoramente e com lucros consistentes. 5,42% da variabilidade dos dados é explicada por esse fator.

As comunalidades para cada ano estão organizadas no Quadro 4.8. No

Apêndice 4, encontram-se os autovalores, os pesos das variáveis em cada fator, a proporção da variância devido a cada fator e os coeficientes dos escores fatoriais ano a ano.

QUADRO 4.8 – COMUNALIDADES

	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	Méd
PM	0,279	0,076	0,136	0,185	0,176	0,180	0,055	0,049	0,066	0,061	0,126	0,126
DY	0,368	0,180	0,107	0,083	0,116	0,156	0,179	0,126	0,202	0,101	0,148	0,161
P/L	0,106	0,043	0,039	0,166	0,017	0,112	0,015	0,122	0,193	0,199	0,060	0,098
P/V	0,497	0,940	0,397	0,659	0,239	0,952	0,903	0,308	0,992	0,758	0,526	0,652
P/VC	0,333	0,132	0,851	0,917	0,334	0,574	0,112	0,562	0,984	0,788	0,781	0,579
P/VCT	0,333	0,132	0,851	0,917	0,334	0,574	0,182	0,583	0,982	0,803	0,903	0,600
P/CGL	0,403	0,046	0,150	0,147	0,031	0,156	0,165	0,095	0,162	0,269	0,235	0,169
ROE	0,831	0,712	0,816	0,887	0,790	0,877	0,445	0,902	0,878	0,791	0,943	0,807
ROA	0,845	0,823	0,795	0,772	0,900	0,917	0,740	0,994	0,995	0,943	0,998	0,884
ROC	0,649	0,234	0,534	0,300	0,379	0,926	0,400	0,675	0,164	0,314	0,679	0,478
ML	0,509	0,944	0,432	0,728	0,360	0,952	0,900	0,865	0,995	0,818	0,987	0,772
MCL	0,141	0,028	0,019	0,031	0,026	0,061	0,018	0,024	0,014	0,013	0,010	0,035
LC	0,909	0,923	0,948	0,925	0,888	0,843	0,875	0,903	0,917	0,844	0,969	0,904
LS	0,905	0,903	0,938	0,927	0,925	0,927	0,895	0,933	0,921	0,867	0,981	0,920
LG	0,869	0,781	0,866	0,886	0,834	0,848	0,869	0,857	0,847	0,815	0,937	0,855
LI	0,765	0,733	0,618	0,871	0,856	0,881	0,832	0,894	0,814	0,813	0,961	0,822
GE	0,957	0,824	0,955	0,959	0,724	0,871	0,643	0,866	0,919	0,728	0,933	0,853
PCTRT	0,843	0,489	0,763	0,754	0,864	0,769	0,682	0,992	0,983	0,934	0,996	0,824
GCPCT	0,770	0,422	0,619	0,829	0,503	0,778	0,492	0,496	0,599	0,529	0,746	0,617
CP	0,688	0,739	0,627	0,542	0,654	0,841	0,632	0,634	0,674	0,612	0,529	0,652
LGM	0,900	0,899	0,871	0,846	0,859	0,925	0,795	0,833	0,768	0,785	0,896	0,852
GEM	0,940	0,791	0,863	0,872	0,550	0,869	0,458	0,203	0,702	0,869	0,974	0,736

Fonte: Statistica 8.0

Esse quadro ajuda a ressaltar as variáveis mais importantes, bem como pode servir de critério para a exclusão de variáveis. Comunalidades inferiores a 0,4, por exemplo, tiveram pouca influência no modelo fatorial e poderiam ser excluídas. Estão nesse caso o Preço de Mercado (PM), a taxa de dividendos (DY), preço/lucro (P/L), Preço por Capital de Giro Líquido (P/CGL) e Média do Crescimento dos Lucros (MCL). É claro que a exclusão dessas variáveis alteraria os fatores anteriormente encontrados, mas seu impacto para explicar a variabilidade dos dados não é tão grande quanto das outras variáveis estudadas. Isso significa que, caso um analista queira usar as variáveis para seus estudos, estas são aquelas que poderiam ser descartadas ou merecerem menor atenção sem que se afete demasiadamente todo o modelo.

De fato, Preço de Mercado e *Dividend Yield* são variáveis que não costumam se mostrar relevantes nos estudos realizados no mercado acionário brasileiro (BUENO, 2002), com exceção dos trabalhos de RODRIGUES (2000) e NAGANO, MERLO e SILVA (2003) quanto ao Preço de Mercado. Os indícios a favor do múltiplo P/L são vários, porém seu impacto tem se mostrado sempre menor que o do múltiplo Preço por Valor Contábil (SILVA, 2003; NAGANO, MERLO e SILVA, 2003; FURLANETTI, FAMÁ e SECURATO, 2010). Não foram encontrados estudos que analisassem individualmente os outros três múltiplos que seriam excluídos devido a suas comunalidades baixas.

Com esses resultados, contribui-se para clarificar a aplicação do modelo de múltiplos no mercado brasileiro, na medida em que se pode atribuir a maior parte da variabilidade dos dados a 8 fatores que englobam critérios de preço, de solvência, de rentabilidade, de tamanho e composição da dívida e de crescimento das empresas de capital aberto. Por conseguinte, se pode simplificar a análise de ativos, sem a necessidade do levantamento de variáveis que não se mostraram relevantes. De posse desses fatores, tanto analistas quanto empresas podem focar nos aspectos realmente importantes para balizarem suas estratégias tendo em vista se diferenciar das demais companhias do mercado.

Como forma de exemplificar e, em certa medida, validar o uso da Análise Fatorial no investimento em ações, foi realizado um estudo de carteira a partir do escore bruto calculado através do modelo fatorial.

A principal vantagem do uso do escore bruto é concentrar em uma medida praticamente toda a informação existente nas 22 variáveis observadas. Dessa maneira, se tem uma forma de ranquear ativos a fim de construir carteiras com o nível de diversificação que se desejar.

Por questões computacionais, os coeficientes associados a cada um dos fatores podem ter sinal positivo num ano e negativo em outro. O que não altera sua

comunalidade nem ortogonalidade, apenas a orientação dos escores, não havendo problemas em multiplicá-lo por -1 a fim de se criar um padrão de análise para todos os anos. Com isso é possível ajustar cada fator para ser do tipo *quanto maior, melhor* ou *quanto menor, melhor* de acordo com a variável de maior peso dentro dele.

Dessa forma, as carteiras foram construídas anualmente, contendo os doze ativos melhor ranqueados. A composição das carteiras e o escore de cada ativo estão sintetizados nos quadros do Apêndice 4. A rentabilidade, o índice de Sharpe e o alfa de Jensen para os diversos períodos estudados estão representados no Quadro 4.9

QUADRO 4.9 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – ESCORES BRUTOS DA ANÁLISE FATORIAL

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	*38,05%	12,37%	*0,0687	0,0053	*26,14%
2 anos	**64,81%	29,32%	*0,0480	0,0067	*35,95%
3 anos	*83,32%	45,10%	*0,0371	0,0046	*41,66%
5 anos	145,23%	92,49%	*0,0372	0,0098	*69,93%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

No estudo de carteira com permanência de um ano, o retorno médio de 38,05% da estratégia foi significativamente superior ao retorno médio do Ibovespa, com um *p-value* de 0,029. O mesmo ocorreu para os retornos da carteira de dois anos, que não passou nos testes de gaussianidade e por isso foi aplicado o teste de Mann-Whitney, e de três anos. O índice de Sharpe da carteira também se mostrou significativamente superior ao índice de Sharpe do Ibovespa (*p-value* de 0,034), indicando que nessa forma de se medir a rentabilidade pelo risco, talvez haja ganhos na estratégia adotada. Também em outra forma de se ponderar a rentabilidade pelo risco, o alfa de Jensen, mostrou-se significativamente superior a zero (*p-value* de 0,003), indicando um retorno anormal médio de 26,14% ao ano.

Os resultados superiores da estratégia também permaneceram nas janelas de dois e três anos para todas as medidas comparativas. Para as carteiras mantidas por cinco anos, o retorno não se mostrou significativamente superior ao do Ibovespa, mas

o alfa de Jensen e o índice de Sharpe sim.

Esses resultados atentam para a possibilidade haver informações nos balanços contábeis das empresas suficientes para separá-las da média do mercado. Ainda que o tratamento dessas informações possa não ser simples, não se reduzindo a uma ou poucas variáveis facilmente identificáveis e havendo interações relevantes entre elas, há a possibilidade de estratégias capazes de identificar ações subvalorizadas de forma a se obter retornos anormais consistentes ao longo dos anos.

A análise das medidas de rentabilidade, também apontam superioridade, porém não significativa, da estratégia de manutenção da carteira por apenas um ano. Assim como no caso dos filtros de Graham, conforme se estende a janela de tempo, menores passam a ser os retornos ao ano. Tal fato aponta novamente para o funcionamento dinâmico do mercado acionário, no qual as negociações diárias podem rapidamente tornar uma empresa sobre ou subavaliada.

Como consequência desse fato, com o uso da análise da fatorial, as carteiras formadas sofriam alterações quase integrais ao longo dos anos (Quadro 4.10). Por outro lado, os fatores que as originaram, com suas variáveis explicitadas no Quadro 4.7, se mostraram praticamente os mesmos no decorrer dos anos. O que indica que os critérios de análise se mantêm bastante estáveis ao longo do tempo. Ou seja, as empresas consideradas bons ou maus investimentos do ponto de vista dessa estratégia mudam bastante de ano para ano, mas os parâmetros que as definem como boas ou ruins se mantêm praticamente os mesmos.

Portanto, a organização do modelo de múltiplos por fatores explicativos auxilia não só a compreensão de aspectos que explicam a variabilidade entre as empresas, como também se mostra útil para a compreensão e elaboração de estratégias que visam uma rentabilidade superior a do mercado. O uso de escores que resumem em uma única medida o ranqueamento de ativos é uma opção também para estratégias que geram carteiras pouco diversificadas. Dessa maneira, o investidor pode selecionar

sempre a quantidade de ativos que achar interessante para manter uma carteira diversificada dentro das varias variáveis analisadas pela sua estratégia. A seguir estão explicitadas as carteiras construídas a cada ano.

QUADRO 4.10 – CARTEIRAS DE MAIOR ESCORE FORMADAS A CADA ANO

1999		2000		2001		2002		2003	
Ativo	Escore	Ativo	Escore	Ativo	Escore	Ativo	Escore	Ativo	Escore
UNIP6	301,0	SUZB5	330,7	SOND6	292,5	UGPA4	305,0	HOOT4	126,6
ESCE3	301,3	EPTE4	330,8	SGEN4	295,9	DXTG4	307,1	DOCA3	126,9
LUXM4	309,8	SBSP3	331,5	TOYB4	297,6	PVPR4	309,0	MWET4	127,1
MTSA4	320,1	ICPI3	337,1	ARTE4	304,2	LEVE4	309,4	ELET3	127,7
ICPI3	321,9	SJOS4	340,1	OXIT4	310,1	SULT4	309,8	CMGR4	127,8
CNFB4	323,7	DURA4	341,8	UGPA4	310,7	ROMI3	315,9	SHUL4	128,7
MNDL4	353,9	MRSL4	343,0	ETER3	311,3	BSUL5	316,4	EMAE4	129,6
BRKM5	367,8	BRKM5	344,9	TKNO4	330,8	PLDN4	322,4	TOYB4	130,7
FESA4	372,0	OXIT4	365,8	ICPI3	337,5	CGRA4	322,8	MNSA4	134,1
BIOB4	373,1	FRAS4	373,6	TPEC6B	348,6	APTI4	353,1	STRP4	146,3
SIBR7	373,6	PLTO6	383,8	PMET6	351,7	PLTO6	353,5	MLFT4	159,6
PLTO6	386,0	EMAE4	386,0	BMKS3	386,0	EKTR4	386,0	USIM5	386,0

2004		2005		2006		2007		2008	
Ativo	Escore	Ativo	Escore	Ativo	Escore	Ativo	Escore	Ativo	Escore
CGRA4	223,4	LUXM4	286,8	ETER3	336,4	WISA4	301,2	TENE5	323,0
RPAD6	223,9	TRPL4	288,6	PMET6	337,7	TEKA4	301,8	SGAS3	323,6
RSIP4	239,5	GOAU4	293,3	PLTO6	338,7	BOBR4	303,1	GVTT3	330,4
PATI4	239,7	GGBR4	294,2	TIBR5	340,0	AMBV4	305,2	KEPL3	332,6
MRSL4	241,5	MRSL4	298,7	MOAR3	341,2	ALLL11	307,9	VALE5	336,7
MOAR3	255,6	PETR4	302,1	RSID3	341,3	HAGA4	309,0	MGEL4	336,8
USIM5	261,0	JFEN3	302,5	CGRA4	355,7	EEEL3B	324,9	EVEN3	350,2
VPSC4	281,3	ALPA4	313,4	UGPA4	355,9	PTBL3	334,7	SGEN4	352,7
PTQS4	291,6	USIM5	324,8	SOND5	356,5	SJOS4	335,6	SCAR3	359,1
ETER3	298,1	SGEN4	335,6	PATI4	357,4	IGBR3	344,6	BAUH4	369,9
TRPL4	336,4	MOAR3	337,0	ALPA4	381,6	PMAM3	372,0	KLBN4	374,4
SGAS4	386,0	UGPA4	386,0	USIM5	386,0	HOOT4	386,0	MEND6	386,0

2009	
Ativo	Escore
UOLL4	298,5
AGRO3	302,5
EZTC3	305,0
DOHL4	310,9
CNFB4	312,4
LPSB3	316,0
BAUH4	323,8
GRND3	334,7
PEAB4	335,1
FESA4	335,7

cont.

TKNO4	367,8
GPIV11	386,0

Fonte: Autor

Aqui, foi utilizado o escore bruto, que é ponderado pelos autovalores, posteriormente ajustados para a escala de 0 a 386 (número médio de empresas da Bovespa no período), mas é possível se determinar outras regras de ponderação e seleção. Uma alternativa é proceder com uma análise discriminante ou outra técnica de reconhecimento de padrões para ranquear os ativos, o que foi feito adiante.

Mesmo a quantidade de fatores explicativos pode ser alterada. Ao invés de utilizar o critério de Kaiser, é possível definir uma porcentagem da variabilidade a ser explicada e trabalhar com quantos fatores forem necessários para dar conta dessa variabilidade. Dessa maneira tem-se um modelo mais completo e, por isso, mais complexo. Cabe analisar se seus resultados são melhores significativamente ao modelo de 8 fatores.

Mais uma variante é atribuir pesos diferentes dentro de cada carteira de 12 ativos, utilizando-se a fronteira eficiente de Markowitz ou outras técnicas de otimização. A variação na quantidade de ativos, ainda estudos indiquem que o número ideal para o mercado brasileiro esteja entre 10 e 12 também é uma possibilidade.

Por fim, vale ressaltar que a Análise Fatorial feita a partir de dados fundamentalistas e com aplicação em ações não se restringe somente a essa forma de análise e a essa forma de ativo financeiro. A partir da metodologia aqui proposta, é possível se utilizar outras formas de análise (técnica, fluxo de caixa descontado, opções reais) que não necessariamente fundamentalista por múltiplos, bem como aplicar a diversos outros produtos negociados no mercado financeiro, como moedas, derivativos e *commodities*.

### 4.3 RESULTADOS DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ANÁLISE DISCRIMINANTE E REGRESSÃO LOGÍSTICA

As técnicas de reconhecimento de padrões utilizadas, Análise Discriminante via função linear de Fischer (FDLF) e Regressão Logística (MRLM) foram utilizadas, primeiro, para identificar as variáveis mais relevantes para diferenciar ativos com rentabilidade superior ao mercado dos que não possuem tal rentabilidade. Para esse objetivo, contou-se com o método *forward stepwise*. O Quadro 4.11 traz variáveis incluídas a cada ano nos modelos.

QUADRO 4.11 – VARIÁVEIS PRESENTES NAS FUNÇÕES DISCRIMINANTES

Ano	FDLF	MRLM
1999	PM, P/L, P/V, P/VC, P/CGL, ROE, ROA, ROC, MCL, LI, GE, PCTRT, LGM, GEM	PM, LI, GE, GEM
2000	PM, DY, P/VC, P/CGL, GCPCT, CP	PM, P/VC
2001	PM, DY, P/V, P/CGL, LC, LG, LI, GCPCT, LGM	DY, P/CGL, LI
2002	DY, ML, LGM	LG, GCPCT
2003	PM, DY, P/L, P/VC, ROA, PCTRT, CP	PM,
2004	PM, DY, LC, LI	PM, DY
2005	P/VCT, P/CGL, MCL, LC, CP	P/VC, CP
2006	PM, DY, P/VC, P/CGL, ROC, MCL, CP, GEM	PM, P/VC
2007	PM, DY, GE,	PM, DY, ROC, LC
2008	DY, P/VC, LC, GE, GCPCT, GEM	P/VC,
2009	DY, P/VC, ROC	DY, PCTRT

Fonte: Autor

As funções para o reconhecimento de padrões são construídas a partir dos grupos de sucesso e fracasso. Como o mercado acionário é dinâmico, ou seja, como o conjunto de empresas que apresentam alta rentabilidade não é muito estável ao longo do tempo, poderia se esperar uma alternância nas variáveis que diferenciam esses grupos nas regras de seleção. Contudo, três variáveis se mostraram recorrentes ao longo dos anos: Preço de Mercado (PM), *Dividend Yield* (DY) e Preço por Valor Contábil (P/VC).

O Preço de Mercado é uma variável dada como significativa em diversos trabalhos nacionais e internacionais de diferentes épocas, alguns deles, já citados, são BANZ (1981), FAMA e FRENCH (1992) e NAGANO, MERLO e SILVA (2003). Na



Análise Fatorial, teve importância discreta, aparecendo em quatro oportunidades entre os fatores que explicam a maior parte da variabilidade, mas com baixa comunalidade numa avaliação geral, assim como a taxa de dividendos (DY) e o Preço por Capital de Giro Líquido (P/CGL). Nos estudos levantados parece não haver uma direção muito bem definida sobre qual direção é mais vantajosa para o Preço de Mercado, alguns apontando para vantagens de pequenas, outros para grandes empresas. Como argumentam CHAN, HAMAO e LAKONISHOK (1991; 1993) seu impacto pode estar muito relacionado com o período analisado, em razão da presença ou não de grandes crises econômicas, e com o modelo de risco utilizado.

Os estudos sobre a distribuição de dividendos (NISSIM e ZIV, 2001; ARNOTT e CLIFFORD, 2003; BUENO, 2002; ROSTAGNO, SOARES e SOARES, 2008) também não são conclusivos, mas quando apontam relevância para essa variável sempre relacionam altas taxas de distribuição de dividendos com maiores retornos dos ativos.

Uma possível explicação, assim como para o PM, também passa pelo período analisado. Entre 1999 e 2011, o Brasil e o mundo passaram por diversos momentos de inquietação dos mercados financeiros, que provocaram rápidos movimentos e grandes quedas nas bolsas de valores. Como citado, houve o estouro da “Bolha da Nasdaq” em 2000, a crise Argentina e o 11 de setembro, em 2001, o risco político da eleição do presidente Lula em 2002 e a crise do *subprime* em 2008, além da crise da dívida pública da Zona do Euro em 2010 e 2011. Lembrando que as regras de classificação são construídas a partir da variação da série temporal das cotações, portanto, mesmo eventos ocorridos no início de 2011 podem ter impactado sobre a construção dos modelos discriminantes.

É fato costumeiro no mercado acionário que, em períodos de alta volatilidade, os investidores migrem de ativos mais arriscados para os entendidos como de menor risco. Mantendo-se no campo acionário, ativos de grandes companhias

e que pagam altos dividendos são entendidos como tal, afinal, do ponto de vista desses investidores, o tamanho e a distribuição dos lucros da empresa minimizam o risco da perda de capital ao se aplicar naquele papel.

Com essa premissa e dados os estudos passados e a janela temporal dessa pesquisa, não se pode descartar a conjuntura econômica do período como fator condicional para a importância ou não, e em qual direção, das variáveis PM e DY . Diante disso, com base nos modelos construídos, esperasse que os investimentos em ativos de grandes empresas e com alta distribuição de dividendos continuem se destacando se os momentos de instabilidade continuarem frequentes nas próximas décadas.

Era de se esperar que o índice P/VC fosse um dos mais relevantes na construção dos modelos de classificação dos papéis. Afinal, ele é tido como a principal variável a influenciar os retornos de ações em dezenas de trabalhos científicos, como CHAN; HAMAO; LAKONISHOK (1991); CAPAUL; ROWLEY; SHARPE (1993); FAMA; FRENCH (1992); PIOTROSKI (2000); DAMODARAN (2006b); ABY *et al* (2001); BRUNI (1998); RAMOS, PICANÇO; COSTA JR (2000); COSTA JR; NEVES (2000) e SILVA (2003). Alinhado com esses estudos, também está o resultado da Análise Fatorial mostrado anteriormente, cujo segundo fator mais importante para explicar a variabilidade dos dados é justamente um critério de preço, medido pelos indicadores P/VC e P/VCT. Dessa forma, diferentes técnicas se reforçam ao apontar esse indicador como fundamental na análise de ativos, independente do mercado ou do momento econômico vivido.

Em menor grau que as três variáveis discutidas até então, mas também frequente nas funções discriminantes construídas, está a razão Preço por Capital de Giro Líquido (P/CGL). Assim, como o P/VC, ela funciona como um filtro de preço, indicando se a empresa está barata ou cara em relação ao capital de giro descontada a dívida financeira da empresa. Esse também é o critério mais restritivo dos filtros de

Graham, que já havia se mostrado eficiente nos estudos de VU (1988) e LAUTERBACH e VU (1993) no mercado estadunidense e, anteriormente, no presente trabalho para o mercado acionário brasileiro. Com isso, chama-se a atenção para essa variável pouco observada pelos trabalhos acadêmicos, mas que se mostra um importante indicador para a análise de investimentos.

Pela discussão feita e pela observação das funções discriminantes, cujos coeficientes de todas as variáveis ano a ano estão disponíveis no Apêndice 5, constata-se que os modelos de reconhecimento de padrões indicam ativos de alto PM, alto DY e baixo P/VC como os de rentabilidade acima da média de mercado. Essas são justamente as características que definem as ações de valor e esse resultado é um grande indício que estudos internacionais sobre o desempenho de investimentos em valor (como CAPAUL, ROWLEY e SHARPE, 1993; FAMA e FRENCH, 1992; 1996. 1998, LAKONISHOK, SHLEIFER e VISHNY, 1994; e MUKHERJI, DAHTT e KIM, 1997) são válidos também para o mercado acionário brasileiro – o que também se mostra coerente com os estudos de baixos múltiplos de preço conduzidos por RAMOS, PICANÇO e COSTA JR (2000), NAGANO, MERLO e SILVA (2003) e ROSTAGNO, SOARES e SOARES (2008).

É esclarecedor perceber que é justamente o investimento baseado em valor que foi tomado como premissa por GRAHAM e DODD (1951) ao iniciarem a escola fundamentalista de análise e criarem os critérios que ficaram conhecidos como filtros de Graham. Com isso, os resultados desse trabalho a respeito das variáveis explicativas se conciliam e se reforçam nas diversas técnicas empregadas – filtros de Graham, Análise Fatorial e Reconhecimento de Padrões –, ao mesmo tempo em que confirmam as premissas teóricas que lhes dão sustentação e reforçam as conclusões de diversos trabalhos científicos acerca do tema. Indiretamente, esse resultado também reafirma o estudo de SANTOS (2010) de que, no Brasil, as carteiras com ações de valor superam o retorno das carteiras de crescimento.

Para avaliar os modelos construídos de reconhecimento de padrões, conferindo peso aos apontamentos feitos anteriormente, tem-se a Abordagem Lachenbruch. Ela foi realizada tanto para os modelos com todas as variáveis originais quanto para os construídos segundo a técnica *forward stepwise*. O Quadro 4.12 traz o índice médio de acerto das regras de classificação e os valores discriminados ano a ano podem ser encontrados no Apêndice 5.

QUADRO 4.12 – MÉDIA DO ÍNDICE DE ACERTO DAS FUNÇÕES DISCRIMINANTES PELA ABORDAGEM LACHENBRUCH

Grupo	FDLF			FDLF <i>Stepwise</i>		
	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	20,33%	6,91	28,09	15,54%	5,18	29,82
Fracasso	97,33%	3,91	140,82	97,62%	3,45	141,27
Total	82,65%	10,82	168,91	81,96%	8,64	171,09

Grupo	MRLM			MRLM <i>Stepwise</i>		
	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	29,22%	9,27	25,73	14,37%	4,55	30,55
Fracasso	96,74%	4,91	139,82	98,60%	1,91	142,73
Total	84,34%	14,18	165,55	82,30%	6,45	173,27

Fonte: Autor

Os modelos tiveram avaliação bastante próxima, com um índice de acerto total de 82,65% para a FDLF e 84,34% para o MRLM. Eles se mostraram particularmente eficientes para discriminar as empresas sem rentabilidade acima do mercado (grupo fracasso), acertando 97,33% e 96,74% das classificações, respectivamente. Nesse quesito, ainda melhor desempenho tiveram os modelos baseados no método *forward stepwise*, com porcentagem de acerto de 97,32% na função de Fisher e 98,60% na Regressão Logística.

A maior concentração de erro dos modelos se deu ao classificar uma empresa de sucesso no grupo fracasso. Na FDLF, 20,33% das empresas eram alocadas corretamente. No MRLM, o índice de acerto foi superior: 29,22%. A princípio, tal

procedimento não é tão prejudicial para o investidor como seria classificar um alto índice de empresas do grupo fracasso como sucesso, apenas se mostra conservador ao alocar poucos ativos para o grupo sucesso. Nesse sentido, o método *stepwise*, com índice de acerto de cerca de 15% nessa classificação, é ainda mais rigoroso.

Por outro lado, observa-se que o método *stepwise* manteve praticamente o mesmo índice de acerto total, 81,96% e 82,30%, mas reduzindo o modelo de 22 indicadores para uma média de 6,2 e 2,4 variáveis na função de Fisher e na Regressão Logística, respectivamente. Com isso, se ganha tanto no poder interpretativo dos modelos quanto nas premissas de separação desejável entre grupos para se utilizar as técnicas de reconhecimento de padrões, sem haver perda significativa na capacidade de alocação dos modelos.

Esse grau de acerto na avaliação é cerca de 15 pontos percentuais superior aos alcançados por TAVARES (2010) em estudo similar já citado. Tal diferença se deve, possivelmente, às diferentes variáveis de entrada do modelo (60% delas são diferentes) e à maneira de separação dos grupos: aqui com base em três medidas de rentabilidade em comparação com o Ibovespa, no estudo comentado uma divisão 50%-50% com base somente no retorno dos ativos.

Uma maneira de validar o modelo e, também, se propor sua utilização como estratégia de investimento, é testar as regras de classificação para a montagem de portfólios nos anos posteriores à construção do modelo. Ao se fazer um estudo de carteira nesses portfólios tem-se as rentabilidades indicadas nos Quadros 4.13 a 4.16

QUADRO 4.13 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – FDLF

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	25,74%	16,05%	0,0569	0,0140	12,17%
2 anos	52,09%	36,24%	0,0461	0,0155	*20,16%
3 anos	71,85%	56,88%	0,0310	0,0136	*20,77%
5 anos	109,18%	101,78%	0,0261	0,0149	*20,34%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

QUADRO 4.14 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – FDLF *STEPWISE*

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	18,49%	16,05%	0,0415	0,0140	-6,62%
2 anos	49,12%	36,24%	0,0427	0,0155	**36,44%
3 anos	79,32%	56,88%	0,0401	0,0136	**76,86%
5 anos	120,94%	101,78%	*0,0360	0,0149	**76,55%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

QUADRO 4.15 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – MRLM

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	28,79%	16,05%	0,0622	0,0140	*13,17%
2 anos	59,55%	36,24%	**0,0752	0,0155	*31,11%
3 anos	85,44%	56,88%	*0,0615	0,0136	*38,89%
5 anos	131,85%	101,78%	*0,0543	0,0149	*54,30%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

QUADRO 4.16 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – MRLM *STEPWISE*

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	25,18%	16,05%	0,0509	0,0140	13,14%
2 anos	48,97%	36,24%	0,0343	0,0155	17,58%
3 anos	73,59%	56,88%	0,0281	0,0136	23,13%
5 anos	114,25%	101,78%	0,0267	0,0149	*23,98%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

Fonte: Autor

A média dos retornos das estratégias foi superior ao mercado em todos os períodos analisados. Na carteira de um ano, o retorno médio máximo foi alcançado pelo Modelo de Regressão Logística Múltipla, 28,79%. Contudo, nenhum dos valores se mostrou significativo.

O índice de Sharpe dos modelos também foi maior que o índice de Sharpe do Ibovespa em todos os períodos analisados, novamente com destaque para a estratégia MRML, que teve três valores significativamente superiores.

O alfa de Jensen indica a presença de retornos anormais das funções

discriminantes em todos os períodos, exceto para a carteira de um ano da Função Discriminante Linear de Fisher via método *Stepwise*. Entretanto, esse medidor, que não pode ser assumido como gaussiano nesse caso, foi significativamente positivo segundo o teste não paramétrico de Mann-Whitney para as demais janelas temporais desse mesmo modelo. De modo geral, o alfa de Jensen é o indicador que mais vezes passou nos testes de hipótese, tendo pelo menos um valor significativo em cada estratégia.

Um fator que contribuiu para a dispersão dos retornos e, consequentemente, para menor sucesso dos testes de hipótese, foi a alta variabilidade da quantidade de ativos nas carteiras montadas segundo as quatro estratégias. Mesmo com os bons resultados do modelo, em alguns anos muitos papéis foram selecionados, desfazendo o caráter conservador que os modelos possuíam quando avaliados sobre a base de dados em que foram construídos. O quadro 4.14 traz a quantidade média, mínima e máxima de ativos em cada estratégia.

QUADRO 4.17 – QUANTIDADE DE ATIVOS EM CARTEIRA

	<b>FDLF</b>	<b>FDLF <i>Stepwise</i></b>	<b>MRLM</b>	<b>MRLM <i>Stepwise</i></b>
Mínimo	6	1	3	2
Máximo	91	94	188	100
Média	27,5	23,8	62,9	34,1

Fonte: Autor

Em alguns momentos, como o ano de 2003, somente um ativo fez parte da carteira de *FDLF Stepwise*, o que acarreta uma maior volatilidade dos retornos e baixos valores nas duas medidas ajustadas ao risco. Em outros, como 2008 para a estratégia *MRLM*, quando 188 papéis foram selecionados, é excessiva a quantidade de ações, implicando grandes custos de transação sem contrapartida na diminuição de riscos.

Nos trabalhos citados anteriormente (CERETTA e COSTA JR, 2000; ASSAF NETO, 2006; OLIVEIRA e PAULA, 2008), o número ideal de ativos para o mercado acionário brasileiro é entre 10 e 12. Assim como na Análise Fatorial, propõe-se uma solução para o problema da diversificação através dos escores, dessa vez, das

funções discriminantes. Ao se obter uma variável resposta univariada nos modelos FDLM e MRLM, pode-se utilizar esse valor para ranquear os ativos e selecionar somente as 12 ações de maior escore, ou escore mais próximo, do grupo sucesso.

Para a montagem de portfólios com 12 ativos foi utilizado o método *stepwise*, visto que assim são satisfeitas as premissas da Análise Discriminante e tem-se um modelo estatisticamente significativo. Por esse motivo, também serão esses os dois modelos utilizados posteriormente para avaliar a Hipótese de Mercado Eficiente. Comparações com as medidas de rentabilidade com esse procedimento estão sintetizados no Quadro 4.18 e 4.19.

QUADRO 4.18 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – 12 ATIVOS FDLF *STEPWISE*

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	23,89%	16,05%	*0,0590	0,0140	*12,01%
2 anos	45,36%	36,24%	0,0422	0,0155	13,41%
3 anos	72,41%	56,88%	0,0382	0,0136	*22,31%
5 anos	122,68%	101,78%	0,0354	0,0149	*35,14%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

QUADRO 4.19 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – 12 ATIVOS MRLM *STEPWISE*

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	23,62%	16,05%	0,0472	0,0140	*12,16%
2 anos	41,11%	36,24%	0,0342	0,0155	*11,17%
3 anos	64,87%	56,88%	0,0277	0,0136	15,20%
5 anos	110,29%	101,78%	0,0245	0,0149	*24,74%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

Fonte: Autor

A inclusão das 12 primeiras ações melhorou a rentabilidade do modelo em praticamente todas as medidas, em comparação com os modelos *stepwise* anteriores e, novamente, supera as marcas de mercado, mas nem sempre de forma significativa. A carteira de um ano teve desempenho bastante parecido nas duas estratégias, 23,89% de retorno e 12,01% de alfa de Jensen para a FDLF e 23,62% de retorno e 12,16% para o



alfa de Jensen do MRLM.

O Índice de Sharpe só foi significativo na carteira de um ano da FDLF, já o alfa de Jensen foi significativamente superior a zero em três dos quatros períodos para cada um dos modelos.

Esses resultados superiores da estratégia e significativos nas medidas ajustadas ao risco, em especial no alfa de Jensen, dão indícios da existência de informações nos balanços contábeis das empresas suficientes para separá-las classificá-las de acordo com sua rentabilidade e, assim, gerar estratégias capazes de identificar ações como potencialmente bons investimentos.

Além disso, apesar de algumas alterações nas variáveis dos modelos, a tônica para separar ações vencedoras das demais se dá pela escolha de investimentos em valor. Tanto que as ações selecionadas para os modelos são bastante estáveis, sendo recorrentes as presenças de empresas como Petrobrás (PETR4), Vale (VALE5), Telesp/Telefônica (TLPP4), Ambev (AMBV3), Itausa (ITSA3), Eletrobrás (ELET3), Companhia Siderúrgica Nacional (CSN3), Embraer (3) e Telemar (TNLP4) entre as escolhidas nas 10 carteiras montadas entre 2000 e 2009. O Quadro 4.20 traz os principais ativos e, no Apêndice 5, são apresentadas as carteiras completas de todos os modelos construídos com base nas técnicas de reconhecimento de padrões.

QUADRO 4.20 – PRINCIPAIS AÇÕES SELECIONADAS PELOS MODELOS FDLF E MRLM 12 STEPWISE

	FLFD	MRLM	Total
PETR4	7	6	13
VALE5	6	7	13
TLPP4	6	7	13
AMBV4	4	4	8
ITSA3	2	5	7
GETI4	3	2	5
ELET3	2	3	5
CSNA3	2	3	5
EMBR3	1	3	4
TMAR5	1	3	4
TNLP4	1	3	4

Fonte: Autor

Desse modo, mostra-se que há espaço para a aplicação de técnicas

multivariadas de reconhecimento de padrões para esclarecer a dinâmica de funcionamento do mercado acionário brasileiro e, também, como estratégia para a construção de portfólios com rentabilidade acima do mercado. Além disso, o uso dos escores das funções discriminantes são uma opção para a montagem de portfólios com o grau de diversificação que for desejado.

Como alternativa às técnicas de reconhecimento de padrões empregadas, há o uso de redes neurais artificiais utilizada com sucesso em diversos campos similares e máquinas de vetor de suporte (SVM). Entretanto, LIU e ZARGHAM (2006) apontaram que as redes neurais não apresentam soluções tão boas quando utilizadas no contexto dessa presente pesquisa. Também não permitem a extração de variáveis explicativas e interpretação do modelo. Por outro lado, não se tem conhecimentos de trabalhos, nos termos aqui colocados, que a testem no mercado acionário brasileiro. Além disso, pode-se combiná-la com diversas outras abordagens de inteligência artificial para se construir modelos mais eficientes.

Na mesma linha, sugere-se o uso da teoria dos conjuntos aproximativos como ferramenta de *data mining*, na qual se pode utilizar os conceitos de núcleo e redução para identificar as variáveis mais significativas na separação de grupos e, a partir delas, adotar regras de decisão. Uma das vantagens dos conjuntos aproximativos é que eles não necessitam de nenhuma informação preliminar ou adicional sobre os dados. Além dessa característica, pode-se fazer um tratamento quantitativo da incerteza, se utilizar métricas estatísticas para avaliar a importância das regras e combiná-los com outras arquiteturas, como a redes neurais.

#### 4.4 RESULTADOS DO RECONHECIMENTO DE PADRÕES – ÁRVORES DE DECISÃO

As árvores de decisão são outro método, alternativo à FDLF e ao MRLM, de reconhecimento de padrões que permite identificar variáveis explicativas. No caso, elas foram avaliadas em termos da entropia de Rényi ou de Shannon para a construção dos modelos de classificação. O Quadro 4.21, a seguir, computa as variáveis incluídas nos modelos a cada ano. No Apêndice 6, encontram-se, em detalhes, todas as árvores de decisão construídas.

QUADRO 4.21 –VARIÁVEIS PRESENTES NAS ÁRVORES DE DECISÃO

Ano	Rényi	Shannon
1999	PM, LG, LC	PM
2000	PM, MCL, P/VCT, LG, CP, ROE, ML, GE	PM, MCL, P/VCT, LG, CP, ROE, ML
2001	PM, ML, ROE, GEM, MCL	PM, ML, ROE, GEM, MCL
2002	GEM, PM, CP, LG, MCL	PM, GEM, CP, P/L, DY
2003	PM, P/V, LG	PM, ML, P/V, ROC, MCL, PCTRT, P/CGL, ML
2004	PM, GEM, DY	DY, P/CGL, MCL, PCTRT, P/VCT
2005	-	PM, CP, ROC, P/VC, MCL
2006	-	PM, P/VCT, CP, P/L, MCL, PCTRT, DY, LC
2007	LC, PM, LS, ROC, MCL, P/VCT, P/CGL, LGM, P/L, DY, P/V	PM, LC, ROC, P/VCT, LGM, P/L, DY, P/V
2008	P/VCT, ROC, DY, P/V, ROE, GEM	-
2009	-	PM, P/VC, ROC, P/V, P/L, PCTRT

Fonte: Autor

Os anos de 2005, 2006 e 2009 para a entropia de Rényi e 2008 para a entropia de Shannon não tiveram variáveis incluídas na construção de suas regras de classificação, tendo todos os ativos sendo classificados como Fracasso. Como o grupo Sucesso foi definido pelos ativos que possuíam as três medidas de rentabilidade acima da média, e não por uma divisão igualitária 50%-50%, a quantidade de ativos no grupo Sucesso era sempre menor que no grupo Fracasso. Nos anos citados, o algoritmo de construção das árvores não foi capaz de encontrar variáveis que discriminassem os grupos com um erro menor do que classificar todos como de rentabilidade abaixo do

mercado.

Ainda assim, o estudo das variáveis mostram uma estabilidade ainda maior nas árvores de decisão do que nas técnicas discriminantes anteriormente aplicadas. O destaque absoluto é da variável Preço de Mercado (PM), presente em 16 dos 18 modelos que tiveram inclusão de variáveis. As outras variáveis frequentes nas árvores são Média de Crescimento dos Lucros (MCL), Preço por Valor Contábil Tangível (P/VCT) e *Dividend Yield* (DY).

As variáveis P/VC e P/VCT estão intimamente ligadas, afinal a diferença é o cômputo ou não do Ativo Intangível. Entretanto, nos balanços das empresas brasileiras os lançamentos de Ativo Intangível são, geralmente, pequenos em comparação com o Ativo Total, o que causa uma correlação bastante grande entre as duas variáveis, em especial no período anterior a 2005. Ainda assim, é esclarecedor perceber que as soluções das árvores de decisão são mais conservadoras ao valorizar somente o patrimônio líquido tangível das empresas, deixando de lado os valores intangíveis, de mensuração mais complexa e passíveis de causarem distorções no múltiplo P/VC.

No trabalho de ROCHA, HEIN e KROENKE (2011) e em ROCHA (2010), que também utilizaram a entropia para detectar a relevância de indicadores econômico-financeiros, não foram usados indicadores de mercado, como o PM, P/VCT e DY. A variável MCL também não foi incluída naquele estudo, que apontou como destaque os indicadores de rentabilidade, em especial o ROE.

Desse modo, a única alteração em relação às variáveis explicativas encontradas na FDLF e no MRLM está na inclusão do indicador MCL. Não foram observados estudos empíricos que avaliassem essa variável, mas, do ponto de vista teórico, ela está em total acordo com os preceitos de Graham para a Análise Fundamentalista.

Em conjunto, as quatro medidas de destaque priorizam grandes empresas, negociadas com um baixo múltiplo P/VCT, de crescimento de destaque e boa

distribuição de lucros. Esse resultado corrobora o já encontrado nas técnicas anteriores de reconhecimento de padrões e reforça a discussão feita naquele momento sobre as vantagens do investimento em valor, em detrimento ao investimento em crescimento, para o mercado acionário brasileiro do período de 1999 a 2011.

Pela abordagem de Lachenbruch, também as árvores de decisão podem ser avaliadas, com o Quadro 2.22 trazendo o índice médio de acerto dos modelos. No Apêndice 6 constam as avaliações de cada ano.

QUADRO 4.22 – MÉDIA DO ÍNDICE DE ACERTO DAS ÁRVORES DE DECISÃO

Grupo	Rényi			Shannon		
	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	31,99%	8,55	26,45	49,22%	17,00	18,00
Fracasso	99,21%	1,27	145,00	96,49%	4,91	141,36
Total	85,27%	9,82	171,45	87,75%	21,91	159,36

Fonte: Autor

Na avaliação geral, as árvores de decisão com base na entropia quadrática de Rényi tiveram um índice de acerto de 85,27%, enquanto com a entropia de Shannon 87,75% dos ativos foram classificados corretamente. Esses resultados são superiores aos da FDLF (82,65%), do MRLM (81,96%) e ao melhor resultado encontrado por TAVARES (2010) em estudo similar (71,2%).

Ponto que chama a atenção é a baixa classificação de empresas do grupo Sucesso como Fracasso com a utilização da entropia de Rényi. Porém, assim como na FDLF e no MRLM, a quantidade de empresas classificadas como Sucesso é pequena, evidenciando certo grau de conservadorismo nas regras de decisão. Nesse quesito, o destaque é do modelo com a entropia de Shannon, que classifica corretamente 49,22% das empresas de maior rentabilidade, o que dá uma média de 17 empresas no grupo Sucesso por ano.

Uma forma de se utilizar na prática essas regras de classificação é aplicá-las no ano seguinte aos dados de sua construção. Os portfólios formados dessa maneira

são avaliados por um estudo de carteira, em busca de retornos que superem o mercado. Os Quadros 4.23 e 4.24 expõem esses resultados e indicam os valores estatisticamente significativos.

**QUADRO 4.23 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – RÉNYI**

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	17,81%	16,05%	0,0328	0,0140	*7,80%
2 anos	35,61%	36,24%	0,0327	0,0155	14,05%
3 anos	46,91%	56,88%	0,0245	0,0136	14,88%
5 anos	92,90%	101,78%	0,0272	0,0149	*31,47%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

**QUADRO 4.24 – MÉDIA DO RETORNO, ÍNDICE DE SHARPE E ALFA DE JENSEN PARA DIFERENTES PERÍODOS – SHANNON**

	Média dos Retornos da Carteira (a.p)	Média dos Retornos do Ibovespa (a.p)	Índice de Sharpe da carteira	Índice de Sharpe do Ibovespa	Média do Alfa de Jensen (a.p.)
1 ano	22,67%	16,05%	0,0504	0,0140	*9,15%
2 anos	48,06%	36,24%	**0,0473	0,0155	*17,81%
3 anos	65,66%	56,88%	0,0355	0,0136	*19,85%
5 anos	124,12%	101,78%	*0,0369	0,0149	*41,42%

\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente positivos/superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

Fonte: Autor

Os retornos logarítmicos baseados na estratégia de árvores de decisão com entropia de Rényi foram muito próximos aos do mercado. O modelo foi potencialmente prejudicado pelos anos em que todos os ativos foram classificados como Fracasso e, portanto, não foram formadas carteiras. Ainda assim, em todos os anos em que houve a elaboração portfólios, o modelo obteve valores de rentabilidade acima do mercado (os valores completos estão no Apêndice 6). Por outro lado, a despeito do retorno próximo, o alfa de Jensen foi significativo para as carteiras refeitas anualmente e a cada cinco anos.

Resultados melhores são notados com a estratégia de árvores de decisão baseadas na entropia de Shannon. O retorno da carteira anual foi de 22,67%, mas sem magnitude ou variabilidade suficiente para ser estatisticamente superior ao retorno de

16,05% do Ibovespa, com o mesmo ocorrendo para os demais períodos. Já o índice de Sharpe foi significativo nos portfólios de dois e cinco anos. O alfa de Jensen, por sua vez, indicou retornos anormais significativos para todos os períodos.

A baixa significância do índice de Sharpe pode ser justificada pelo fato das carteiras não serem sempre bem diversificadas, fato melhor discutido posteriormente. Esse medidor penaliza portfólios com poucos ativos, o que pode ter contribuído para a não significância estatística do indicador em alguns períodos.

Ainda assim, com as medidas significativas nos índices corrigidos pelo risco, novamente se tem indícios da capacidade de modelos detectarem empresas subavaliadas e utilizarem essa identificação para obter lucro. Contudo, as estratégias enfrentaram o problema de diversificação, o que pode ter prejudicado seus resultados. Nos dois modelos houve anos em que nenhum ativo foi selecionado, enquanto em outros se ultrapassou 40 ações em carteira. Como indica o Quadro 4.25, a média de ativos usando-se a entropia de Rényi foi de 12,65 ativos, com a entropia de Shannon foi de 26,5.

QUADRO 4.25 – QUANTIDADE DE ATIVOS EM CARTEIRA

	Rényi	Shannon
Mínimo	0	0
Máximo	49	77
Média	12,5	26,5

Fonte: Autor

Nas árvores de decisão, há o agravante de, a partir dela, não ser possível corrigir o problema de diversificação com o uso de escores, como foi feito na Análise Discriminante e na Regressão Logística. Mas esse problema pode ser contornado com o cálculo de escores fatoriais, tomando como base as variáveis incluídas no modelo ou pelo emprego de lógica *fuzzy*. A operacionalização dessas propostas é deixada como sugestões de melhorias do modelo para trabalhos futuros.

O conjunto de anos sem variáveis na árvore de decisão (que se refletiu nas carteiras sem ativos), o índice de acerto maior dos outros modelos e os bons retornos bons, mas não significativos, do estudo de carteira para os dados de fora da amostra de

construção, podem indicar algum superajustamento (*overfitting*) na construção das árvores. Nesse caso, técnicas distintas de crescimento, como a utilização de critérios diferentes do ganho de informação e da razão de ganho, e podagem podem ser empregadas para se tentar refinar o modelo, sendo mais uma proposição para outras pesquisas.

Voltando à discussão de investimento em valor, levantada pelas variáveis presentes nas árvores de decisão, cabe identificar quais são as ações que compuseram as carteiras. Do mesmo modo que ocorreu com a FDLF e o MRLM, o previsto a partir das variáveis se confirma nos portfólios: as empresas de valor foram sistematicamente selecionadas.

QUADRO 4.26 – PRINCIPAIS AÇÕES SELECIONADAS PELOS MODELOS DE ÁRVORES DE DECISÃO

	Rényi	Shannon	Total
PETR4	3	5	8
ITSA3	2	5	7
ELET3	3	4	7
BRTP3	2	5	7
ACES4	3	4	7
BRKM5	3	3	6
DURA4	3	3	6
EEEL3	2	4	6
TCSL4	2	4	6
FFTL4	2	4	6
TMCP4	2	4	6
TMGC7	2	4	6
TLPP4	2	3	5
AMBV4	2	3	5
EMBR3	1	4	5

Fonte: Autor

Pelo quadro 4.26, vê-se a repetição dos ativos Petrobrás (PETR4), Telesp/Telefônica (TLPP4), Ambev (AMBV3), Itausa (ITSA3), Eletrobrás (ELET3) e Embraer (EMBR3) que já estavam presentes nas estratégias anteriores de reconhecimento de padrões. Além delas, outras grandes empresas de seus setores como Brasil Telecom (BRTP3), Braskem (BRKM5), Duratex (DURA4), Tim (TCSL4), Telemig (TMCP4) e Telemig Celular (TMGC7) também compuseram, com frequência, os portfólios, substanciando a tese de investimento em valor.



Outras melhorias ao modelo podem ser buscadas variando-se o algoritmo de indução da árvore, o alfa adotado para a entropia de Rényi e a forma de estimação da janela de Parzen. Mais uma possibilidade, válida também para a FDLF e o MRLM, é construir regras não com base somente nas informações contábeis do último ano, mas tomando os últimos dois, três ou cinco anos como dados amostrais. Todavia, essa proposição tem que ser analisada à luz dos momentos econômicos vividos, já que bruscas modificações podem deturpar os resultados das técnicas de reconhecimento de padrões.

#### 4.5 COMPARAÇÃO DE ESTRATÉGIAS E EFICIÊNCIA DO MERCADO

Pela literatura observada, há muita controvérsia sobre a Hipótese de Mercado Eficiente. Como ela afirma ser impossível identificar sistematicamente oportunidades de ganho acima do retorno ajustado ao risco do mercado, os procedimentos dessa pesquisa indicam o fato dessa hipótese ser falsa ou, ao menos, incompleta.

Conclusões diretas sobre esse ponto não são possíveis, visto a complexidade do tema e sua relação com os modelos de mensuração de risco. Ainda assim, os resultados apontam para uma violação nessa hipótese e na possibilidade de se usar técnicas multivariadas baseada na Análise Fundamentalista pelo método de múltiplos para se conseguir rentabilidade acima do mercado. Essa afirmação se deve a basicamente três argumentos: os resultados significativos das estratégias, a composição não coincidente das carteiras e a identificação de variáveis explicativas.

O primeiro argumento é justificado pelos valores apresentados nos quadros 4.27 a 4.29 a seguir. Nele estão disponíveis as rentabilidades do Ibovespa e das carteiras montadas segundo os filtros de Graham e a Análise Fatorial entre 1999 e 2009 e segundo os modelos de reconhecimento de padrões entre 2000 e 2009.

Os testes estatísticos comparando o Ibovespa com as estratégias mostram a superioridade destas. Os melhores resultados para todos os índices de rentabilidade

ocorreram nas carteiras refeitas anualmente, apesar de diversos resultados significativos também para as outras janelas temporais. Para o retorno logarítmico, somente as estratégias de reconhecimento de padrões não se mostraram significativas para o período de um ano. São desses quatro modelos, também, as menores rentabilidades entre as estratégias propostas, entretanto ainda maiores que a do mercado. O índice de Sharpe dos modelos é significativamente superior ao do Ibovespa em todas as carteiras anuais, exceto em MRLM 12 *Stepwise* e nas Árvores de Decisão. Eficiência igual é observada quando se analisa o alfa de Jensen, no qual os testes estatísticos apontam para retornos anormais positivos em todos os modelos, exceto nos filtros de Graham com os qualificadores originais.

QUADRO 4.27 – MÉDIA DO RETORNO LOGARÍTMICO DAS DIVERSAS ESTRATÉGIAS

	Filtros de Graham originais (a.p)	Filtros de Graham modificados (a.p)	Análise Fatorial (a.p.)	FDLF 12 <i>Stepwise</i>	MRLM 12 <i>Stepwise</i>
1 ano	*39,61%	*39,78%	*38,05%	23,89%	23,62%
2 anos	55,05%	*68,81%	**64,81%	45,36%	41,11%
3 anos	70,43%	*91,01%	*83,32%	72,41%	64,87%
5 anos	118,3%	137,16%	145,23%	122,68%	110,29%
	Árvore de Decisão via Rényi	Árvore de Decisão via Shannon	Ibovespa (a.p)		
1 ano	17,81%	22,67%	12,37%		
2 anos	35,61%	48,06%	29,32%		
3 anos	46,91%	65,66%	45,10%		
5 anos	92,90%	124,12%	92,49%		

\* valores estatisticamente superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

QUADRO 4.28 – MÉDIA DO ÍNDICE DE SHARPE DAS DIVERSAS ESTRATÉGIAS

	Filtros de Graham originais (a.p)	Filtros de Graham modificados (a.p)	Análise Fatorial (a.p.)	FDLF 12 <i>Stepwise</i>	MRLM 12 <i>Stepwise</i>
1 ano	*0,1056	*0,0975	*0,0687	*0,0590	0,0472
2 anos	*0,0597	*0,0737	*0,0480	0,0422	0,0342
3 anos	*0,0434	*0,0610	*0,0371	0,0382	0,0277
5 anos	*0,0568	*0,0570	*0,0372	0,0354	0,0245
	Árvore de Decisão via Rényi	Árvore de Decisão via Shannon	Ibovespa (a.p)		
1 ano	0,0328	0,0504	0,0053		
2 anos	0,0327	**0,0473	0,0067		
3 anos	0,0245	0,0355	0,0046		
5 anos	0,0272	*0,0369	0,0098		

\* valores estatisticamente superiores ao Ibovespa no teste t de Student

\*\* valores estatisticamente superiores ao Ibovespa no Mann-Whitney

QUADRO 4.29 – MÉDIA DO ALFA DE JENSEN DAS DIVERSAS ESTRATÉGIAS

	Filtros de Graham originais (a.p)	Filtros de Graham modificados (a.p)	Análise Fatorial (a.p.)	FDLF 12 Stepwise	MRLM 12 Stepwise
1 ano	173,61%	*25,81%	*26,14%	*12,01%	*12,16%
2 anos	*54,55%	*40,93%	*35,95%	13,41%	*11,17%
3 anos	*65,33%	*49,66%	*41,66%	*22,31%	15,20%
5 anos	*111,62%	*76,60%	*69,93%	*35,14%	*24,74%
	Árvore de Decisão via Rényi	Árvore de Decisão via Shannon			
1 ano	*7,80%	*9,15%			
2 anos	14,05%	*17,81%			
3 anos	14,88%	*19,85%			
5 anos	*31,47%	*41,42%			

\* valores estatisticamente positivos no teste t de Student

Fonte: Autor

Ao se testar a diferença de média entre os sete modelos propostos, não se encontrou significância nas medidas. O retorno das três primeiras estratégias foi bastante próximo, com os filtros de Graham modificados para a realidade brasileira alcançando a maior medida: 39,78%. O índice de Sharpe teve maior valor na estratégia original dos filtros de Graham originais, 0,0975, seguido de perto pelos filtros modificados. Por sua vez, o alfa de Jensen foi próximo também entre os filtros de Graham modificados e a Análise Fatorial, com a última tendo o valor mais alto entre os que se mostraram significativos.

Com isso, duas estratégias se destacam. Ao serem adaptados para o mercado brasileiro, os filtros de Graham tiveram o melhor desempenho em quase todas as medidas de rentabilidade na comparação com os demais modelos. Além disso, possuem uma histórica fundamentação teórica e são de fácil aplicação mesmo para o pequeno investidor pessoa física. Com esse resultado, espera-se ter se trazido uma importante contribuição para a área, uma vez que foi desenvolvido um modelo para a realidade brasileira, de simples aplicação e significativa eficácia.

O outro modelo de destaque é o obtido a partir dos escores da Análise Fatorial. Ao selecionar os fatores que mais explicam a variabilidade dos dados e selecionar os melhores ativos, com base nesses fatores, que geram um retorno

significativamente superior ao do mercado, tem-se uma forte evidência contra a Hipótese de Mercado Eficiente e uma solução para o problema de diversificação de portfólios, que pode ocorrer com os filtros de Graham. Com isso, também se inova ao aplicar técnicas estatísticas multivariadas na análise ampla de ações no país e na proposição do uso dos escores da Análise Fatorial (e forma equivalente para as técnicas de reconhecimento de padrões) como resposta para uma baixa ou excessiva diversificação.

Voltando para a comparação de retornos, olhando-se para os três primeiros modelos, poderia se atribuir os retornos próximos a carteiras similares sendo construídas pelas três estratégias. De fato, entre as duas primeiras, baseadas nos Filtros de Graham, há diversas coincidências de papéis em ambas as carteiras, no entanto, em relação ao uso da Análise Fatorial, essas similaridades são pontuais. Da média de 386 empresas negociadas na Bovespa no período, 131 (praticamente um terço) em algum momento fizeram parte da carteira de uma das estratégias, o que mostra uma grande rotatividade dos ativos.

Uma possível explicação que contribui para esse fato, partindo da hipótese de que as estratégias citadas são capazes de identificar ações subavaliadas, é que esse erro na precificação é corrigido com relativa rapidez, no que concerne às estratégias de longo prazo, pelo mercado. Novamente chama-se a atenção para o fato de que, ainda que as empresas classificadas como bons investimentos variem de ano a ano, os critérios que definem uma boa empresa para se investir, tanto nos termos dos Filtros de Graham quanto da Análise Fatorial, se mantêm constantes ao longo dos anos. Aliás, certa estabilidade nas variáveis que funcionam como critério de seleção também ocorre nos modelos baseados em reconhecimento de padrões.

O Quadro 4.30 mostra os 14 ativos mais selecionados nas sete estratégias. Não parece haver neles qualquer pré-disposição por segmentos de atuação ou valor de mercado. Contudo, como resultado da própria diversificação, a estratégia baseada na

Análise Fatorial foi a que selecionou empresas dos mais variados tamanhos, grandes como a siderúrgica Usiminas (USIM5 – patrimônio líquido de R\$17 bilhões em setembro de 2011) e pequenas como a consultora de engenharia Sondotécnica (SOND6 – patrimônio líquido de R\$71 milhões em setembro de 2011). Já os modelos discriminantes foram mais concentrados nas empresas de grande valor de mercado, como Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5). Ainda assim, companhias menores foram escolhidas, um exemplo é a empresa de comércio Grazziotin (CGRA4 – patrimônio líquido de R\$291 milhões em setembro de 2011) selecionada ao menos uma vez em quase todas as estratégias. No Apêndice 7, consta a relação completa de ativos selecionados em cada um dos modelos.

QUADRO 4.30 – NÚMERO DE VEZES QUE OS PRINCIPAIS ATIVOS FORAM SELECIONADO EM CADA ESTRATÉGIA

	Filtros de Graham originais	Filtros de Graham modificados	Análise Fatorial	Análise Discriminante	Regressão Logística	Árvore via Rényi	Árvore via Shannon	Total
PETR4			1	7	6	3	5	22
VALE5			1	6	7	2	2	18
TLPP4				6	7	2	3	18
TKNO4	5	1	2					17
AMBV4			1	4	4	2	3	14
ITSA3				2	5	2	5	14
CGRA4	2	4	3	1	2		1	13
ELET3			1	2	3	3	4	13
PLTO6	1	3	4		1		2	11
ECPR4	4	5						9
ROMI3	1	6	1				1	9
USIM5			4	1	1	1	2	9
EMBR3				1	3	1	4	9
BRKM5			2	1		3	3	9

Fonte: Autor

A diferença de ativos na composição das carteiras é mais um fato que concede solidez aos modelos e enfraquece a HME. Pois, não se trata da escolha de poucos portfólios vencedores, coincidentes entre os diversos modelos em razão de flutuações aleatórias e que por isso geraram retornos estatisticamente significativos.

Ao serem propostos modelos com diversas regras de funcionamento e com diferenças em seus critérios de seleção e, mesmo assim, eles conseguirem selecionar um conjunto de ativos que supera o mercado, tem-se a indicação de que podem de fato haver erros identificáveis na precificação das ações e que um investidor pode obter retornos consistentes ao longo dos anos ao se aproveitar desses erros.

Uma análise pormenorizada das empresas e do momento que elas atravessavam ao serem incluídas nas carteiras, bem como de seu impacto nas medidas de rentabilidade, é um estudo que pode ser feito para se aprofundar no funcionamento do mercado acionário brasileiro e na compreensão do sucesso por detrás das estratégias propostas.

Outro fato que reforça a fragilidade da HME é a identificação de variáveis explicativas permitida pela aplicação das técnicas estatísticas multivariadas empregadas. Mesmo que haja um senso comum sobre quais condições e indicadores são necessários para se conhecer uma empresa financeiramente saudável e economicamente promissora, tem-se muitas variáveis e diversos fatores envolvidos que nem sempre são quantificados e tem seu peso corretamente atribuído. Nessa lacuna, a utilização da Análise Fatorial, da Análise Discriminante, da Regressão Logística e das Entropias ofereceram importantes contribuições para identificar e ranquear a importância das variáveis explicativas.

Segundo a Análise Fatorial, a maior parte da variabilidade dos dados é explicada pelos fatores de liquidez, preço, rentabilidade e Grau de Endividamento. E mais, fornece pesos com os quais se pode atribuir uma ordem de importância a esses fatores. Também, inclui quais são as variáveis importantes nesses fatores (Liquidez Seca, corrente e imediata; Preço por Valor Contábil e Preço por Valor Contábil Tangível; Retorno sobre Ativos e Retorno sobre o Patrimônio Líquido; razão dívida sobre patrimônio líquido e dívida sobre patrimônio líquido tangível). Por mais que os fatores pudessem ser imaginados por um profissional ou estudioso da área,

difícilmente seria intuída a ordem de importância desses fatores ou uma regra de seleção quantitativa seria encontrada sem o apoio de técnicas como as aqui apresentadas.

Por sua vez, a Análise Discriminante e a Regressão Logística apontaram as empresas de valor como, consistentemente, as de rentabilidade superior à do mercado. Nelas, foi identificado o Preço de Mercado, a razão Preço por Valor Contábil e a taxa de distribuição de dividendos (*Dividend Yield*) como as principais variáveis que discriminam os grupos de ativos de sucesso dos de fracasso – com a aplicação desse modelo gerando retornos ajustados ao risco novamente significativos.

Resultado bastante semelhante ocorreu com as entropias, que selecionaram Preço de Mercado, Média de Crescimento dos Lucros, Preço por Valor Contábil Tangível e *Dividend Yield* como as variáveis que mais contêm informações sobre os ativos.

Esse conjunto de fatos, mostra que a construção de estratégias que superam consistentemente o mercado não é um caso isolado determinado por alguma situação específica ou ocorrida somente durante algum intervalo de tempo antes do mercado corrigir as distorções que lhes deram origem. Pelo contrário, a presença de retornos significativos num estudo de mais de uma década é motivo para se questionar a HME.

Entretanto, não se pode afirmar categoricamente que a Hipótese de Mercado Eficiente não é válida. Isso porque, ao investigá-la, é preciso tomar como opção um ou mais modelos de mensuração de risco, que também acabam sendo testados. Por isso, em geral, não se pode fazer afirmações conclusivas sobre se o mercado é ineficiente ou se o modelo de mensuração de risco que é inadequado. Dessa forma, uma sugestão para trabalhos futuros é a utilização de outras medidas de avaliação além do alfa de Jensen e do índice de Sharpe, como o M ao quadrado, índice de Treynor ou outros, de forma a se colher mais indícios sobre o sucesso das estratégias. Afinal, quanto mais indicadores de risco apontarem para a existência de estratégias de seleção que superam

significativamente o mercado, mais consistentes são as evidências de sua ineficiência.

Uma expansão dos modelos aqui propostos pode ser alcançada ampliando-se o número de indicadores levantados, incluindo classificações para a atividade das empresas e a inserção das companhias do setor financeiro. Não foi tomada tal medida nessa pesquisa em atenção aos pressupostos de Graham, mas uma análise de maior profundidade dos setores da economia, incluindo indicadores próprios de cada atividade específica, pode incrementar ainda mais o sucesso das estratégias.

Também, apesar da extensão temporal, não se pode descartar a possibilidade das estratégias terem se beneficiado de ocorrências presentes somente nos anos estudados (de 1999 a 2009). Apesar de esse período ter compreendido momentos de crise e euforia do mercado financeiro, o modelo pode não ser tão satisfatório em outros períodos e em outras realidades econômicas. A manutenção desse estudo nos anos posteriores, sua aplicação em outros intervalos temporais, como janelas trimestrais, e em outros países é uma forma de elucidar a estabilidade desses resultados. Um cenário em especial a ser testado é o comportamento dos modelos em longos períodos de prosperidades econômicas, ainda que um contexto como esse, *a priori*, seja favorável para a aplicação de técnicas estatísticas multivariadas.



## CONCLUSÃO

Nesse trabalho apresentou-se uma forma de se utilizar técnicas estatísticas multivariadas para reconhecer e classificar empresas que estejam subavaliadas pelo mercado. Tal processo se baseia no uso de modelos de reconhecimento de padrões, nos conceitos teóricos da escola Fundamentalista e, particularmente, na abordagem de Graham e na identificação de fatores explicativos entre índices bursáteis e econômico-financeiros, todos publicamente disponíveis. Com isso, abre-se a oportunidade de se testar também a Hipótese de Mercado Eficiente em sua forma semiforte no mercado acionário brasileiro.

Num primeiro momento, sempre entre 1999 e 2009, foram avaliados os filtros de Graham, uma das formas de aplicação dos preceitos da Análise Fundamentalista. Novos qualificadores, buscando adequação ao cenário nacional, foram propostos. Em seguida, a técnica multivariada de Análise Fatorial foi aplicada em busca da identificação dos fatores responsáveis por explicarem a maior parte da variabilidade dos dados. Com seus resultados, foi construída uma regra de seleção de ativos com base na medida do escore bruto das observações. Por fim, efetuou-se a Análise Discriminante em duas formas: função discriminante linear de Fisher e modelo de regressão logística múltipla, e a construção de Árvores de Decisão. As três técnicas servem de alternativa às estratégias anteriores e visam, por meio do reconhecimento de padrões, fornecer mais esclarecimentos sobre o funcionamento do mercado brasileiro.

Os filtros de Graham foram desenvolvidos como uma forma rústica de reconhecimento de padrões entre as décadas de 1930 e 1970 para o mercado norte-americano. Como esperado, sua aplicação direta no mercado brasileiro não é a mais adequada, apesar dos bons resultados da estratégia. O maior problema encontrado não foi quanto aos seus preceitos, empresas “boas e baratas” na visão de Graham parecem

ter suas características relativamente mantidas ao longo dos anos e em diferentes cenários. Porém, devido à quantidade de ativos negociados na Bovespa, a diversificação dos portfólios ficou bastante prejudicada. Alguns filtros se mostraram bastante restritivos. O mais extremo deles ( $P/CGL < 0,66$ ) selecionava, em média, somente 4 empresas a cada ano, gerando carteiras muito concentradas em poucos ativos.

O problema da diversificação se agrava, em especial, nos períodos de alta do mercado, como entre 2003 e 2007. Nesses anos, os portfólios formados contaram com três ou menos ativos, havendo casos em que nenhum ativo satisfizesse ao menos sete dos 10 critérios de seleção. Mesmo com o alto risco advindo dessa baixa diversificação, o índice de Sharpe da carteira se mostrou estatisticamente superior ao índice de Sharpe do Ibovespa nos 4 períodos de tempo analisados (carteiras mantidas por um, dois, três ou cinco anos). O alfa de Jensen também indicou um retorno significativamente positivo para todos os períodos, com exceção da carteira anual.

De maneira a contornar o problema da diversificação e oferecer critérios de seleção mais adequados ao cenário nacional, propôs-se a flexibilização dos qualificadores através do uso dos quartis. Dessa forma, cada filtro assume um mesmo peso, selecionando sempre 25% das empresas negociadas a cada ano.

Com isso, o problema de diversificação foi bastante minimizado. O mínimo de ativos num portfólio foram de 4, no ano de 2007, todos os outros anos tiveram 7 ou mais ativos selecionados. No outro extremo, em 2008, 36 empresas passaram pelos critérios de avaliação, o que pode gerar o problema oposto de excesso de diversificação, para o qual foi desenvolvida uma solução com base na Análise Fatorial e outra na Análise Discriminante.

A rentabilidade com o uso dos quartis se mostrou estatisticamente superior ao mercado em todas as medidas utilizadas, menos o retorno logarítmico de 5 anos. A comparação entre os diversos períodos e a confrontação com os filtros originais,

mostra que a estratégia baseada nos quartis com a carteira refeita anualmente é a que produziu melhores resultados. Ela apresentou boa adequação a diversos momentos do mercado nacional, consistência em suas medidas de rentabilidade e elevada capacidade de diversificação. Sua média de retorno logarítmico ao ano foi de 39,78% face a 12,37% do Ibovespa, com um índice de Sharpe de 0,0975 contra 0,0053 e um retorno anormal de 25,81% no período.

Os resultados da estratégia original dos filtros de Graham e, em particular, da adaptação com as medidas separatrizes fortaleceram a base teórica para a aplicação de técnicas multivariadas de reconhecimento de padrões. Como sugestões de novos desenvolvimentos de trabalhos focados na filtragem passiva, tem-se a possibilidade de uso da lógica *fuzzy* e da programação multicritérios como formas promissoras de abordagem.

Além dos modelos de filtragem passiva, houve a aplicação de técnicas multivariadas, também a partir de Análise Fundamentalista de ações em seu modelo de múltiplos. A Análise Fatorial mostrou ser possível, a partir da extração dos fatores e do cálculo de escores para as observações, também elaborar estratégias de investimentos que apresentam retornos anormais.

Num primeiro momento, essa técnica foi capaz de resumir a informação presente nas inúmeras variáveis originais em uma menor quantidade de fatores, de maneira a descartar algumas variáveis comumente utilizadas no modelo de múltiplos e fornecer uma interpretação para o conjunto de variáveis agrupadas em cada fator. Nessa perspectiva, os índices de liquidez e rentabilidade assumiram grande importância, algo comumente não observado nos trabalhos da área.

Ainda que os fatores devam ser analisados ano a ano, uma interpretação de caráter mais geral pode ser feita, identificando-se oito fatores principais para explicar a variabilidade dos dados. O primeiro deles se refere à liquidez, por meio dos índices de Liquidez Seca, Corrente e Imediata. O segundo está relacionado à precificação do

Valor Contábil, através de múltiplos Preço por Valor Contábil e Preço por Valor Contábil Tangível. O terceiro é um fator de rentabilidade, medido a partir do Retorno sobre Ativos e do Retorno sobre o Patrimônio Líquido. O quarto trata do Grau de Endividamento, na comparação de sua Dívida Total com seu Patrimônio Líquido (Total e Tangível). Juntos esses fatores são responsáveis por mais de 50% da variância observada.

De menor importância, e mais volúveis ano a ano, tem-se fatores de rentabilidade e precificação da receita líquida, Composição do Endividamento, precificação do capital de giro líquido e crescimento dos lucros. Conjuntamente, estão contidos nesses fatores meios de se identificar empresas negociadas a baixos preços, financiadas conservadoramente e com lucros consistentes. Pressupostos que, para a Análise Fundamentalista, fariam uma empresa se destacar das demais no longo prazo.

De conhecimento dos fatores que englobam essas características, analistas e gestores das empresas podem elaborar estratégias para diferenciar suas empresas das demais empresas de capital aberto visando obter uma rentabilidade superior ao mercado. Nesse sentido, o principal ponto a ser observado é que os quatro primeiros fatores referem-se a critérios de dívida, preço e rentabilidade. Abrangendo, com isso, praticamente todos os aspectos preditos na teoria para se identificar boas empresas.

Tendo em vista a elaboração de estratégias, foi proposta uma medida de ranqueamento dos ativos com base nos fatores encontrados. Essa estratégia apresentou uma rentabilidade significativamente superior ao Ibovespa e alfa de Jensen significativamente positivo em praticamente todas as suas variantes. O melhor dos resultados foi para a janela temporal de um ano, que obteve retorno logarítmico de 38,05% a.a. frente a 12,37% do Índice Bovespa, índice de Sharpe de 0,0578 contra 0,0053 e alfa de Jensen de 26,14%. Para trabalhos futuros, há espaço para ainda melhorar a composição das carteiras e os pesos atribuídos a função de ranqueamento com técnicas matemáticas e estatísticas de otimização e reconhecimento de padrões.

A proposição dos escores com base nos fatores relevantes é decisiva para eliminar problemas de diversificação de uma carteira. Aqui foi aplicada à Análise Fundamentalista, mas sua metodologia seria a mesma para quaisquer variáveis utilizadas ou os ativos tratados. Do mesmo modo, essa solução pode ser utilizada em outros modelos, como de fato o foi para a Análise Discriminante e a Regressão Logística.

As duas primeiras técnicas de reconhecimento de padrões empregadas, Função Discriminante Linear de Fisher e Modelo de Regressão Logística Múltipla, foram inicialmente aplicadas utilizando-se todas as variáveis e, depois, somente as significativas de acordo com o método *forward stepwise*. Os resultados foram satisfatórios, com um índice de acerto na classificação superior a 80% em todos os casos. Entretanto, as funções se mostraram bastante conservadoras para designar uma ação como de sucesso, estando aí a maior concentração de erros das funções discriminantes, o que não é de todo prejudicial, mas pode acarretar problemas de diversificação.

Pelos resultados desses modelos, que foram muitos semelhantes, extrai-se que basicamente três variáveis são as capazes de diferenciar significativamente as ações com retorno acima do mercado das demais: o Preço de Mercado, o *Dividend Yield* e o Preço por Valor Contábil. Também com alguma relevância, há a presença de outro múltiplo, a variável Preço por Capital de Giro Líquido. Diante dessas variáveis e da classificação das ações nos grupos Sucesso e Fracasso, observou-se que a designação de sucesso é frequentemente atribuída às empresas de valor, em contraposição às empresas de crescimento. Na avaliação dos modelos, o índice total de classificação correta foi de 81,96% para a FDLF *Stepwise* e 82,30% para o MRLM *Stepwise*.

Um estudo de carteira entre os anos de 2000 e 2009 forneceu solidez para esse argumento, uma vez que os retornos obtidos foram superiores ao mercado,

entretanto nem sempre houve significância estatística nesses resultados. Um dos problemas encontrados nesses portfólios foi a grande variabilidade do número de ativos, podendo incluir apenas uma ou mais de 100 ações em carteira. Para solucionar essa questão, usou-se os escores obtidos a partir das funções discriminantes de modo a incluir somente as 12 ações melhor ranqueadas a cada ano em cada um dos dois modelos. Com isso, os resultados foram um pouco superiores. Para o período de um ano, a média de retorno da FDLF foi de 23,89%, do MRLM de 23,62% enquanto do Ibovespa foi de 16,05%, porém o resultado ainda não foi significativo. Por outro lado, o alfa de Jensen das duas estratégias e o índice de Sharpe da FDLF tiveram valores estatisticamente superiores ao do mercado.

Resultados próximos foram obtidos pelo uso de Árvores de Decisão tendo como base para a seleção de variáveis as entropias de Rényi e Shannon. As variáveis de destaque foram PM, MCL, P/VCT e DY, praticamente as mesmas encontradas na Análise Discriminante e na Regressão Logística, o que reforça a identificação de empresas de valor no mercado acionário brasileiro pelas técnicas de reconhecimento de padrões baseadas na Análise Fundamentalista.

Na avaliação dos modelos pela abordagem de Lachenbruch, percebeu-se resultados melhores que os encontrados nas duas técnicas anteriores de reconhecimento de padrões, com acertos totais de 85,27% para a entropia quadrática de Rényi e 87,75% para a de Shannon. A árvore de decisão baseada na entropia de Shannon também trouxe a interessante capacidade de classificar com maior índice de acerto do grupo Sucesso, obtendo o maior índice entre todos os modelos citados: 49,22%.

O estudo de carteira obteve retornos mais próximos ao do mercado, com o modelo utilizando entropia de Shannon o superando. Contudo, nem sempre as medidas de rentabilidade foram significativas, mas com o destaque do alfa de Jensen, significativamente positivo em todas as janelas de tempo para a entropia de Shannon e

nas carteiras de um e cinco anos da entropia de Rényi. Colabora com esse fato o viés do índice de Sharpe penalizar carteiras pouco diversificadas, o que aconteceu com certa frequência no uso de árvores de decisão.

Com momentos sem formação ou com poucos ativos em carteiras, em especial com uso da entropia de Rényi, depara-se novamente com o problema de diversificação. Nas árvores de decisão não há uma medida de escore que permita contornar o problema das maneiras propostas na Análise Fatorial e nas técnicas anteriores de reconhecimento de padrões. Contudo, outras estratégias podem ser empregadas, como o uso de lógica *fuzzy*, para se obter refinamentos do modelo.

Apesar da questão de diversificação, as técnicas de reconhecimento de padrões alcançaram resultados satisfatórios também na montagem de portfólios, com diversas medidas ajustadas ao risco superando o mercado, mas não de maneira tão contundente quanto os filtros de Graham e a Análise Fatorial.

Na comparação de estratégias, a despeito dos problemas de diversificação, a proposição da estratégia dos filtros de Graham adaptados à bolsa brasileira teve o melhor desempenho de investimento entre todos os modelos construídos. Ele possui também a vantagem de ser facilmente aplicado pelo pequeno investidor pessoa física, dada sua simplicidade e a facilidade de implementação. Dessa forma, tem-se o desenvolvimento desse modelo, criado para atender as demandas do mercado nacional, como a principal contribuição desse trabalho. Em seguida, os progressos alcançados pela estratégia baseada na Análise Fatorial, que resolve problemas de diversificação frutos da escassez ou excesso de ativos no portfólio, inclusive podendo ser combinado com outros modelos, a caracterizam como a segunda melhor estratégia proposta e sua construção e a extração e interpretação dos fatores explicativos da variabilidade como também importantes avanços da presente pesquisa.

Outra técnica de reconhecimento de padrões sugerida para ser implementada nos dados é a de redes neurais artificiais e máquinas de vetor de suporte (SVM).

Mesmo sem promover a interpretação das variáveis do modelo, um estudo de carteira a partir dessa técnica oferece resultados que podem questionar a HME e podem ser comparados à rentabilidade dos modelos aqui construídos. O Quadro 5.1 traz um resumo das medidas de rentabilidade encontradas para as diversas estratégias nas carteiras refeitas anualmente, que foram as que apresentaram os melhores resultados.

QUADRO 5.1 – MÉDIA DAS MEDIDAS DE RENTABILIDADE PARA AS CARTEIRAS DE UM ANO NAS DIVERSAS ESTRATÉGIAS

	Filtros de Graham originais (a.p)	Filtros de Graham modificados (a.p)	Análise Fatorial (a.p.)	FDLF 12 Stepwise	MRLM 12 Stepwise
Retorno logarítmico	*39,61%	*39,78%	*38,05%	23,89%	23,62%
Índice de Sharpe	*0,1056	*0,0975	*0,0687	*0,0590	0,0472
Alfa de Jensen	173,61%	*25,81%	*26,14%	*12,01%	*12,16%
	Árvore de Decisão via Rényi	Árvore de Decisão via Shannon	Ibovespa (a.p)		
Retorno logarítmico	17,81%	22,67%	12,37%		
Índice de Sharpe	0,0328	0,0504	0,0053		
Alfa de Jensen	*7,80%	*9,15%	-		

\* valores estatisticamente positivos no teste t de Student

Fonte: Autor

Esses resultados trazem indícios de ineficiência no mercado acionário brasileiro, mas, principalmente, evidenciam a possibilidade do uso da Análise Fatorial e das técnicas de reconhecimento de padrões para avaliação de ativos. E isso se dá tanto em sua contribuição de resumir a influência de dezenas de indicadores a poucas variáveis explicativas ou a fatores de identificação de interpretação simplificada, quanto como instrumentos para a elaboração de estratégias e construção de carteiras diversificadas através do ranqueamento por escores para cada ativo.

De modo geral, a teoria do *valuation* como pregada por Graham fica bastante fortalecida com os resultados aqui expostos. Ou seja, as estratégias mostram que talvez haja, entre os fundamentos contábeis das empresas, variáveis explicativas de seu



sucesso no mercado.

Cabe salientar, que, novamente em consonância com os pressupostos de Graham, as estratégias construídas priorizaram empresas sólidas, no sentido de possuírem crescimento consistente e financiamento conservador, com preço baixo em relação a seus múltiplos, como baixo Preço por Valor Contábil. Mais do isso, as técnicas de reconhecimento de padrões selecionaram sistematicamente companhias conhecidas como empresas de valor: grandes empresas, com boa distribuição de dividendos e de baixos múltiplos. Indicando que pode haver espaço no mercado acionário brasileiro para se identificar empresas subavaliadas e se alcançar retornos significativos a partir da montagem de portfólios com base nelas.

Acredita-se, também, que os resultados desta pesquisa possam contribuir para maiores reflexões sobre a potencialidade das técnicas estatísticas multivariadas e da teoria da informação na análise de empresas e de investimentos, ao mesmo tempo em que motive o interesse de acadêmicos e profissionais da área para a relevância da teoria fundamentalista e do modelo de múltiplos.

## REFERÊNCIAS

- ABY, C. D, et al. Value Stocks: A Look at Benchmark Fundamentals and Company Priorities. **Journal of Deferred Compensation**, v. 7, n. 1, p. 20-31, mar./2001.
- ALBERTO, J. G. C; VIEIRA, B. L. S. Análise do retorno de ações com baixo preço/lucro e boa liquidez na bovespa no período 1999 a 2007. **Revista de Contabilidade e Controladoria**, Curitiba, v. 3, n. 3 p. 66-81, set./dez. 2011.
- AMARAL, M. K. **Aplicação da Estatística Multivariada na Análise das Obrigações Condicionais do Programa Bolsa Família**. Curitiba, 2006, 90 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.
- ANDERSON, T. W. **An Introduction to Multivariate Statistical Analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1958.
- ANTUNES, M. T. P; CORRAR, L. J; KATO, H. T. A eficiência das informações divulgadas em “Melhores & Maiores” da Revista Exame para a previsão do desempenho das empresas. **Revista Contabilidade & Finanças - USP**. São Paulo, p. 41-50, jun. 2004. Edição Especial.
- ARNOTT, R. D; CLIFFORD, S. A. Surprise! Higher Dividends = Higher Earnings Growth. **Financial Analysts Journal**, v 59, n. 1, p. 70-87, fev./2003.
- ASSAF NETO, A. **Estrutura e análise de balanços: um enfoque econômico-financeiro**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- \_\_\_\_\_. **Mercado Financeiro**. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2006.
- AVERY, J. **Information Theory and Evolution**. Cingapura: World Scientific, 2003.
- BANZ, R. Anomalies in relationships betewwn return and market value of common stocks. **Journal of Financial Economics**, v. 9, n. 1, p. 3-18, mar./1981.
- BASU, S. The investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratio: a test of the efficient market hypothesis. **Journal of Finance**, v. 32, n. 3, p. 445-455, jul./1977.
- BAUMAN, W. S; CONOVER, C. M; MILLER, R. E. Growth versus value and large-cap versus small-cap stocks in international markets. **Financial Analysts Journal**, v 54, n. 2, p. 75-89, mar./1998.
- BORGES, O. A. A. **Estudo de estratégia de investimento utilizando o múltiplo p/l no mercado de capitais brasileiro**. Florianópolis, 2008. 50 p. Monografia (Graduação em Ciências Econômicas) – Universidade Federal de Santa Catarina.
- BREIMAN, L.; FRIEDMAN, J. H.; OLSHEN R. A.; STONE, C. J. **Classification and Regression Trees**. Belmont (EUA): Wadsworth Int, 1984.
- BRUNI, A. L. **Risco, retorno e equilíbrio: uma análise do modelo de precificação de ativos financeiros na avaliação de ações negociadas na Bovespa**. São Paulo, 1998. 173 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo.

BUENO, A. F. Os Dividendos Como Estratégia de Investimentos em Ações. **Revista Contabiliadde & Finanças**, v. 28, n.1, p. 39-55, abr./2002.

CALDEIRA, A. M. **Seleção de carteiras utilizando técnicas não paramétricas**. 78 f. Rio de Janeiro, 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Engenharia Elétrica – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

CAPPAUL, C; ROWLEY, R; SHARPE, W. F. International value and growth stock returns. **Financial Analysts Journal**, v. 49, n. 1, p. 27-36, fev./1993.

CERETTA, P. S.; COSTA JR, N. C. A. Quantas ações tornam um portfólio diversificado no mercado de capitais brasileiro? In: COSTA JR, N. C. A.; LEAL, R. P. C.; LEMGRUBER, E. F. **Mercado de Capitais – Análise Empírica no Brasil**. Rio de Janeiro: Coppead/UFRJ, 2000. p. 19-33.

CHAN, L; HAMAO, Y. H; LAKONISHOK, J. Fundamentals and stock returns in Japan. **Journal of Finance**, v. 46, n. 5, p. 1739-1764, dez./1991.

COLAUTO, R. D.; BEUREN, I. M. Um estudo sobre a influência de *Accruals* na correlação entre o lucro contábil e a variação do capital circulante líquido de empresas. **Revista de Administração Contemporânea**, Curitiba, v. 10, n. 2, p. 95-116, abr./jun. 2006.

COPELAND, T.; KOLLER, T. MURRIN, J. **Avaliação de empresas – valuation**: calculando e gerenciando o valor das empresas. 3 ed.. São Paulo: Pearson Education, 2002.

COSTA JR, N. C. A; COSTA, N. C. A. Teoria do Caos e Mercado Financeiro. In: COSTA JR, N. C. A; LEAL, R. P. C; LEMGRUBER, E. F. (Orgs) **Mercado de Capitais: análise empírica no Brasil**. São Paulo: Atlas, 2000. p. 168-173.

COSTA JR, N. C. A.; LEAL, R. P. C.; LEMGRUBER, E. F. **Mercado de Capitais – Análise Empírica no Brasil**. Rio de Janeiro: Coppead/UFRJ, 2000.

COSTA JR., N. C. A; NEVES, M. B. E. das. As variáveis fundamentalistas retornos das ações no Brasil. **Revista Brasileira de Economia**, v. 54, n.1, p. 123-137, mar./2000.

COVER, T. M.; THOMAS, J. A. **Elements of Information Theory**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

DAMODARAN, A. **Investment Valuation**. 2 ed. New York: John Wiley and Sons, 2002.

\_\_\_\_\_. **Filosofias de Investimento**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2006a.

\_\_\_\_\_. **Mitos de Investimentos**. São Paulo: Financial Times – Prentice Hall, 2006b.

FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **Journal of Finance**, v. 25, n.2, p. 383-417, mai./1970.

\_\_\_\_\_. Efficient Capital Markets II. **Journal of Finance**, v. 46, n.5, p. 1575-1617, dez./1991.

FAMA, E. F; FRENCH R. The cross-section of expected stock returns. **Journal of Finance**, v. 47, n.2, p. 427-466, jun./1992.

\_\_\_\_\_. Common risk factor in the returns on stocks and bonds. **Journal of Financial Economics**, v. 33, n.1, p. 3-56, fev./1993.

\_\_\_\_\_. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. **Journal of Finance**, v. 50, n.1, p. 55-84, mar./1996.

\_\_\_\_\_. Value versus growth: the international evidence. **Journal of Finance**, v. 53, n.6, p. 1975-1999, dez./1998.

DANCEY, C; REIDY, J. **Estatística Sem Matemática para Psicologia**: Usando SPSS para Windows. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FAVERO, H. L; LONARDONI, M; SOUZA, C; *et al.* **Contabilidade**: teoria e prática. Vol. 2. São Paulo: Atlas, 1995.

FAVERO, L. P.; BELFIORE, P.; SILVA, F. L.; CHAN, B. **Análise de dados**: Modelagem multivariada para tomada de decisões. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

FORTI, C. A. B.; PEIXOTO, F. M.; SANTIAGO, W. P. Hipótese da Eficiência de Mercado: Um Estudo Exploratório no Mercado de Capitais Brasileiro. **Gestão & Regionalidade**, São Caetano do Sul, v.25, n.75, set./dez. 2009.

FURLANETTI, C. E.; FAMÁ, R.; SECURATO, J. R. Análise dos retornos de carteiras de ações montadas a partir do uso de múltiplos de mercado: estudo empírico com ações da BM&FBovespa, entre 2002 e 2009. In: XIII Seminários em Administração, 2010. **Anais...** São Paulo: USP, 2010.

GAMA, J. M. P. **Combining classification algorithms**. Porto, 1999. 195p. Tese (Doutorado em Ciência de Computadores) – Departamento de Ciência de Computadores, Universidade do Porto.

GARSON, G. D. **Statnotes**: Topics in Multivariate Analysis. Disponível em: <<http://faculty.chass.ncsu.edu/garson/PA765/statnote.htm>> Acesso em: <2 out. 2011>.

GONÇALVES, L. B. **Entropia de Rényi e informação mútua de Cauchy-Schwarz aplicadas ao algoritmo de seleção de variáveis MIFS-u**: um estudo comparativo. 106 f. Rio de Janeiro, 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Engenharia Elétrica – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

GRAHAM, B. **O Investidor Inteligente**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2007.

GRAHAM, B; DODD, D. L. **Security Analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1951.

GRAY, R. M. **Entropy and Information Theory**. New York: Springer Verlag, 2009.

GUIMARÃES, I. A. **Construção e avaliação de uma regra de reconhecimento e classificação de clientes de instituição financeira com base na Análise Multivariada**. Curitiba, 2000, 115 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

\_\_\_\_\_. **Modelos de Regressão Logística Oculco e de Componentes Principais para Reconhecimento e Classificação de Padrões com Variável Resposta Polítômica**. Curitiba, 2006, 118 f. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

HAIR, J.F.; ANDERSON, R.E.; TATHAM R.L. **Multivariate Data Analysis**. New York: Macmillan, 1987.

HALMENSCHLAGER, C. **Um algoritmo para indução de árvores e regras de decisão**. Porto Alegre, 2002. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

HARTLEY, R. V. L. The Transmission of Information. **Bell System Technical Journal**, v. 7, n. 3, p. 535-563, jul. 1928.

HAUGEN, R; BAKER, N. Commonality in the determinants of expected stock returns. **Journal of Financial Economics**, v. 41, n. 3, p. 401-439, jul./1996

HAYASHI, A. D. **Aplicações dos fractais ao mercado de capitais utilizando-se as Elliott Waves**. Florianópolis, 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Produção) Engenharia da Produção – Universidade Federal de Santa Catarina.

HAZZAN, S. **Desempenho de ações da Bolsa de Valores de São Paulo e sua relação com o índice preço/lucro**. São Paulo, 1991. Tese (Doutorado em Administração) - EAESP, Fundação Getúlio Vargas.

HESTON, S.L; ROUWENHORST, G.K; WESSELS, R.E. The role of beta and size in the cross-section of European stock returns. **European Financial Management**, v. 5, n.1, p.9-27, mar./1999.

HOSMER, D. W; LEMESHOW, S. **Applied Logistic Regression**. Amherst: John Wiley & Sons, 1989.

JACOBS, B. I; LEVY, K. N. Disentangling Equity Return Irregularities: new insights and investment opportunities. **Financial Analyst Journal**, v. 44, n. 3, p. 18-44, jun/1988a.

\_\_\_\_\_. On the Value of “Value”. **Financial Analyst Journal**, v. 44, n. 3, p. 47-62, jun/1988b.

JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

JAGADEESH, N. Does market risk really explain the size effect? **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 27, n. 3, p. 337-351, set./1992.

JAYNES, E. T. Information Theory and Statistical Mechanics. **Physical Review**, v. 106, n.4: p. 620–630, 1957.

JENSEN, M.C. Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios. **Journal of Business**, vol. 42, n.2, p.167-247, abr./1969.

JENSSEN, R.; PRINCIPE, J. C.; ERDOGMUS, D.; ELTOFT, T. The Cauchy-Schwarz Divergence and Parzen Windowing: Connections to Graph Theory and Mercer Kernels. **Journal of the Franklin Institute**, v. 343, n 6, p. 614–629, Set. 2006.

JOHNSON, R. A; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998.

LACHENBRUCH, P. A. **Discriminant Analysis**. New York: Hafner Press, 1975.

LAIDLER, K. J. **The Physical World of Chemistry**. Oxford: Oxford University Press, 1995.

LAKONISHOK, J; SHLEIFER, A; VISHNY, R. Contrarian investment, extrapolation and risk. **Journal of Finance**, v. 49, n.5, p. 1541-1578, dez./1994.

LAUTERBARCH, B; VU, J. Ben Graham's net current asset value rule revisited: the size-adjusted returns. **Quarterly Journal of Business and Economics**, v. 32, n.1, p.82-108 , jan./1993.

LAZO, J. G. L. **Sistema híbrido genético-neural para montagem e gerenciamento de carteiras de ações**. Rio de Janeiro, 2000. 180 f. Dissertação (Mestrado em Sistemas de Computação) – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro.

LEMOES, E. P. **Análise de crédito bancário com o uso de Data Mining**: redes neurais e árvores de decisão. Curitiba, 2003. 147 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

LIMA, J. D. **A análise econômico-financeira de empresas sob a ótica da estatística multivariada**. Curitiba, 2002. 192 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

LIMA, L. A. O. Auge e Declínio da Hipótese dos Mercados Eficientes. **Revista de Economia Política**, São Paulo, v. 23, n. 4 (92), out./dez. 2003.

LIMA, C. F. L.; ASSIS, F. M.; SOUZA, C. P. Árvores de Decisão baseadas nas entropias de Shannon, Rényi e Tsallis para Sistemas Tolerantes a Intrusão. In: La Novena Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática CISCi 2010, 2010, Orlando. **Anais...** Orlando: CISCi, 2010.

LITNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. **Review of Economics and Statistics**, v. 47, p.13-37, 1965.

LIU, R; ZARGHAM, M. R. Relationship Between Fundamental Values In The Financial Market. **International Conference on Information and Knowledge Engineering**, p. 102-108, Las Vegas, 2006.

LOWE, J. **Value Investing Made Easy**: Benjamin Graham's Classic Investment. New York: McGraw-Hill, 1997.

MACIEL, L. S.; BALLINI, R. Previsão com redes neurais artificiais no mercado de ações brasileiro: modelo técnico e modelo fundamentalista. In: XII SemeAd, 2009. **Anais...**, São Paulo, USP, 2009.

MARDIA, K. V; KENT, J. T; BIBBY, J. M. **Multivariate Analysis**. Londres: Academic Press, 1979.

MARION, J. C. **Análise das demonstrações contábeis**. 3. ed., São Paulo: Atlas, 2005.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 7, n.1 p. 77-91, mar./1952.

\_\_\_\_\_. Foundations of Portfolio Theory. **Journal of Finance**, v. 46, n.2, p. 469-478, jun./1991.

MAROCO, João. **Análise estatística**: com a utilização do SPSS. Lisboa: Sílabo, 2003.

MARQUES, J. M; MARQUES, M. A. M. As componentes principais no descarte de variáveis em um modelo de regressão múltipla. **Revista da Fae**, v. 8, n. 1, p. 93-101, jun./2005.

MATARAZZO, D. C. **Análise financeira de balanços**. 6. ed., São Paulo: Atlas, 2003.

MELLAGI FILHO, A.; ISHIKAWA, S. **Mercado Financeiro e de Capitais**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MERSCHMANN, L. H. C. **Classificação probabilística baseada em análise de padrões**. Niterói, 2007. 117 f. Tese (Doutorado em Otimização Combinatória) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Universidade Federal Fluminense.

MINGOTI, S. A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. Belo Horizonte: UFMG, 2005.

MORETIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de Séries Temporais**. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

MORRISON, D. F. **Multivariate Statistical Methods**. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1976.

MARTINEZ, A. L. Detectando *Earnings management* no Brasil: estimando os *accruals* discricionários. **Revista Contabilidade & Finanças**, São Paulo, v. 19, n. 46, p. 7-17, jan./abr. 2008.

MUKHERJI, S; DHATT, M. S; KIM, Y. H. A fundamental analysis of Korean stock returns. **Financial Analyst Journal**, v. 53, n. 3, p. 75-80, jun/1997.

MULLER, S. I. M. G. **Comparação entre os métodos de máxima verossimilhança, distância mínima e o método de Fisher para o reconhecimento de padrões em imagens coloridas**. Curitiba, 1997. 116 f. Dissertação (Mestrado em Geodésica) – Setor de Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná.

NAGANO, M. S; MERLO, E. M; SILVA, M. C. As Variáveis Fundamentalistas e seus Impactos na taxa de Retorno de Ações no Brasil. **Revista da FAE**, Curitiba, v. 6, n. 2, p. 13-28, 2003.

NISSIM, D; ZIV, A. Dividends Changes and Future Profitability. **Journal of Finance**, v. 56, n.6, p. 2111-2133, dez./2001.

NÓBREGA, E. R. **A Multiplicidade do conceito do capital de giro e seus derivados: Teoria e Prática**. João Pessoa, 2002.

OLIVEIRA, F.; PAULA, E. Determinando o Grau Ótimo de Diversificação para Investidores Usuários de *Home Brokers*. **Revista Brasileira de Finanças**, Rio de Janeiro, v. 6, n.3, p. 437-461, set./dez. 2008.

OPPENHEIMER, H. R. A test of Ben Graham's stock selection criteria. **Financial Analyst Journal**, v. 40, n. 5, p. 68-74, out/1984.

OPPENHEIMER, H. R; SCHLARBAUM, G.G. Investing with Ben Graham: An Ex Ante Test of the Efficient Markets Hypothesis. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 16, n. 3, p. 341-360, set./1981.

PARZEN, E., On estimation of a probability density function and mode. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 33, n. 3, p. 1065-1076, 1962.

PASSOS, V. C. S. **Estratégias de Investimento em Bolsa de Valores: Uma Pesquisa Exploratória da Visão Fundamentalista de Benjamin Graham**, 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Administração) - Faculdade de Ciências Humanas de Pedro Leopoldo.

PINTO, T. R. **Aplicação de Modelos Não Lineares em Negociação Automática no Mercado Acionário Brasileiro**. Rio de Janeiro, 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PIOTROSKI, J. D. Value Investing: The use of Historical Financial Information to Separate Winners from Losers, **The Journal of Accounting Research**, v. 38 (Supplement), p. 1-41, 2000.

PÓVOA, A. **Valuation – Como Precificar Ações**. 2. ed. São Paulo: Globo, 2007.

PRINCIPE, J. C. **Information theoretic learning**: Rényi's entropy and kernel perspectives. New York: Springer Verlag, 2010.

QUINLAN, J. R. Induction of decision trees. **Machine Learning**, Hingham (EUA), v. 1, n. 1, p. 81-106, 1986.

\_\_\_\_\_. Decision trees and multivalued attributes. **Machine Intelligence**, n. 11, p. 305-318, 1988.

\_\_\_\_\_. **C4.5**: Programs for Machine Learning. San Diego (EUA): Morgan Kaufmann, 1993.

RAMOS, P. B; PICANÇO, M. B; COSTA JR., N. C. Retornos e Riscos das *Value e Growth Stocks* no Mercado Brasileiro. In: COSTA JR, N. C. A; LEAL, R. P. C; LEMGRUBER, E. F. (Orgs) **Mercado de Capitais**: análise empírica no Brasil. São Paulo: Atlas, 2000. p. 124-138.

REIS, A. **Demonstrações contábeis**: estrutura e análise. São Paulo: Saraiva, 2003.

RÉNYI, A. On measures of entropy and information. In: Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1960. **Anais...** Berkeley: University of California Press, 1961, v.1, p. 547-561.

ROCHA, I. **Grau de entropia da informação em indicadores econômico-financeiros das empresas que participam dos níveis de governança corporativa da BM&FBovespa**. Blumenau, 2010. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis) - Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da Universidade Regional de Blumenau.

ROCHA, I.; HEIN, N.; KROENKE, A. Grau de entropia da informação em indicadores econômico-financeiros das empresas do setor econômico materiais básicos participantes dos níveis de governança corporativa da BM&FBovespa no período de 2005 a 2009. In: XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2011. **Anais...**, Ubatuba: SBPO, 2011.

ROKACH, L.; MAIMON, O. **Data mining with decision trees**. Theory and applications. Cingapura: World Scientific Publishing, 2008.

RODRIGUES, M.R.A. **O efeito valor, o efeito tamanho e o modelo multifatorial**: evidências do caso brasileiro. Rio de Janeiro, 2000. 125 f. Dissertação de Mestrado – Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

ROSTAGNO, L. M.; SOARES, K; T; C; SOARES, R. O. O Perfil Fundamentalista das Carteiras Vencedoras e Perdedoras na Bovespa no Período de 1995 a 2002. **Brazilian Business Review**, vol. 5, n. 3, p.271-288 , dez./2008.



SALES, R. M; AGUIAR, R. A. Classificação de ações de companhias abertas utilizando técnicas fuzzy. In: VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2003, Bauru. **Anais...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Automática, 2003, v. 1. p. 562-566.

SALGUEIRO, G. C. **Comparação das filosofias de investimento de Benjamin Graham e Warren Buffett**: aplicação no mercado brasileiro. São Paulo, 2007. 101 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Administração) – Universidade de São Paulo.

SANTOS, L. R. **Aplicação de estratégias de value investing no mercado acionário brasileiro**. Rio de Janeiro, 2010. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Administração) – Programa de Pós Graduação em Administração e Economia, Faculdade de Economia e Finanças Ibmecc.

SCOTT, D. W. **Multivariate Density Estimation**. New York: John Wiley & Sons, 1992.

SENECHACK, A. J. JR; MARTIN, J. D. The relative performance of the PSR and PER Investment Strategies. **Financial Analyst Journal**, v. 43, n. 2, p. 46-56, abr./1987.

SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. **Bell System Technical Journal**, n. 27, p. 379-423 e p. 623-656, jul./out. 1948.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Capital Asset Pricing. **Journal of Finance**, v. 19, n.3, p. 425-442, set./1964.

\_\_\_\_\_. Mutual Fund Performance. **Journal of Business**, v. 39, n.1, p. 119-138, jan./1965.

\_\_\_\_\_. Asset allocation: management style and performance measurement. **The Journal of Portfolio Management**, v. 18, n.2, p. 7-19, jul./1992.

SILVA, J. P. **Análise financeira das empresas**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2001.

SILVA, L. A. F. **A verificação das relações entre estratégias de investimento e as hipóteses de eficiência de mercado** – um estudo na bolsa de valores de São Paulo. São Paulo, 2003. 110 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

SMITH, B. M. **History of the Global Stock Market**: From Ancient Rome to Silicon Valley. Chicago: University of Chicago Press, 2004.

SOARES, A. S. **Predição de Séries Temporais Econômicas por meio de Redes Neurais Artificiais e Transformada Wavelet**: Combinando Modelo Técnico e Fundamentalista, 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade de São Paulo.

SOBRAL, A. P. B. **Previsão de carga horária** – uma nova abordagem por árvore de decisão. Rio de Janeiro, 2003. 90 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

SOUTES, D. O. Gerenciamento de resultados contábeis e retorno anormal: o mercado brasileiro reage ao gerenciamento de resultados contábeis? **Revista Contabilidade e Controladoria**, Curitiba, v. 3, n. 3, p. 51-65, set./dez. 2011.

SOUZA, L. V. **Programação Genética e Combinação de Preditores para Previsão de Séries Temporais**. Curitiba, 2006. 154 f. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

STEINER, M. T. A. **Uma Metodologia para o Reconhecimento de Padrões Multivariados com Resposta Dicotômica**. Florianópolis, 1995. 158 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina.

STEINER, M. T. A.; CARNIERI, C. . Verificação da Eficiência de Métodos Estatísticos no Reconhecimento de Padrões via Simulação. In: XXXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 1994, Florianópolis, SC. **Anais...** Rio de Janeiro, RJ : SBPO, 1994. p. 567-571.

TABACHNICK, B.; FIDELL, L. **Using multivariate analysis**. Needham Heights: Allyn & Bacon, 2007.

TAVARES, A. L. **A eficiência da análise financeira fundamentalista na previsão de variações no valor da empresa**. Natal, 2010, 184 f. Tese (Doutorado em Ciências Contábeis), Programa de Doutorado Multinstitucional e Inter-regional de Pós Graduação em Ciências Contábeis, Universidade Federal de Brasília, Universidade Federal da Paraíba e Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

VANSTONE, B; FINNIE, G; e TAN, C. Evaluating the Application of Neural Networks and Fundamental Analysis in the Australian Stockmarket. **IASTED International Conference on Computational Intelligence (CI 2005)**, Calgary, CA, 2005.

VU, J, An Empirical Analysis of Ben Graham's Net Current Asset Value Rule. **Financial Review**, v. 23, n.2, p. 215-225, mai./1988.

ZARGHAM, M. R; HU, L. Assigning Weights to Rules of An Expert System based on Fuzzy Logic. In: TANAKA, T; OHSUGA, S; ALI, M. (Orgs) **Industrial and Engineering Applications of Artificial Intelligence and Expert Systems**, Fukuoka: Gordon and Breach Publishers, 1996. p. 189-193.

ZARGHAM, M. R; SAYEH, M. R. A web-based information system for stock election and evaluation. **International Workshop on Advance Issues of E-Commerce and Web-Based Information Systems**, p. 81-83, Santa Clara, EUA, 1999.

ZIGHED, D. A.; RAKOTOMALALA, R. **Graphes d'Induction** – Apprentissage et Data Mining. Paris: Hermes Science Publications, 2000.

## APÊNDICE 1 – DIVERSIFICAÇÃO DE UM PORTFÓLIO

Em seu modelo, MARKOWITZ (1952) assume que os investimentos ocorrem sob condição de incerteza. Dessa forma, os retornos de cada um dos ativos que compõem a carteira são dados por variáveis aleatórias. Para um portfólio de  $n$  ativos, tem-se

$$R_p = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i \quad (\text{A1.1})$$

onde  $R_p$  é o retorno do portfólio,  $r_i$  é o retorno do ativo  $i$  e  $\omega_i$  é o peso do ativo  $i$  no portfólio, de forma que  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ .

Investimentos baseados exclusivamente na maximização dos retornos implicariam em adquirir somente o ativo de maior retorno esperado. Todavia, tal estratégia imbui todo o risco do único ativo. Markowitz, observando que a maioria dos investidores não coloca sua riqueza em um único ativo, mas numa carteira de ativos na qual uns são mais rentáveis que outros, construiu um modelo teórico no qual o investidor racional não toma suas decisões considerando apenas o retorno do investimento, mas também seu risco.

Em suas premissas, o retorno foi quantificado pela esperança matemática do retorno do ativo e seu risco pela variância dos mesmos retornos. Dessa maneira,

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i E(r_i) \quad (\text{A1.2})$$

Usando a notação  $E(r_i) = \bar{r}_i$ , a variância é expressa por:

$$\begin{aligned}
V(R_p) &= E\left[(R_p - \bar{R}_p)^2\right] \\
V(R_p) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i r_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{r}_i\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (r_i - \bar{r}_i)\right)^2\right] \\
V(R_p) &= E\left[\sum_{i=1}^n \omega_i (r_i - \bar{r}_i) \sum_{j=1}^n \omega_j (r_j - \bar{r}_j)\right] \\
V(R_p) &= E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] \\
V(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j E\left[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] \\
V(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \text{COV}(r_i, r_j) \tag{A1.3}
\end{aligned}$$

$$V(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{A1.4}$$

onde  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  são o desvio padrão do ativo  $i$  ou  $j$  e  $\rho_{ij}$  é correlação entre os ativos.

Pela equação A1.4 é possível observar que sempre que dois ativos não forem perfeitamente correlacionados, a variância deles em conjunto é menor que a variância individual. Ou seja, o uso de ativos não perfeitamente correlacionados diminui o risco do investimento.

É possível evidenciar também o papel do número de ativos para demonstrar que a diversificação reduz o risco da carteira. Para isso, parte-se da equação A1.3, da relação já utilizada  $\text{COV}(r_i, r_j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$  e, por questões de simplicidade, de uma diversificação igualitária entre os  $n$  ativos de forma que  $\omega_i = \omega_j = 1/n$ :

$$\begin{aligned}
V(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \text{COV}(r_i, r_j) \\
V(R_p) &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_i \omega_j \text{COV}(r_i, r_j) \\
\sigma_p^2 &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{COV}(r_i, r_j) \tag{A1.5}
\end{aligned}$$

Para  $n$  ativos existem  $n(n-1)$  pares de covariâncias e a média da covariância é dada por:

$$E\left[\text{COV}(r_i, r_j)\right] = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{COV}(r_i, r_j)}{n(n-1)}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{COV}(r_i, r_j) = n(n-1)E\left[\text{COV}(r_i, r_j)\right] \quad (\text{A1.6})$$

Substituindo A1.6 em A1.5, tem-se:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \frac{1}{n^2} n(n-1)E\left[\text{COV}(r_i, r_j)\right]$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \frac{(n-1)}{n} E\left[\text{COV}(r_i, r_j)\right] \quad (\text{A1.7})$$

Evidenciando os efeitos da diversificação no cômputo do risco, tem-se que conforme aumenta o número  $n$  de ativos na carteira, a primeira parcela da variância diminui, enquanto a segunda permanece praticamente constante. No caso de  $n$  tendendo ao infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \frac{1}{n^2} n(n-1)E\left[\text{COV}(r_i, r_j)\right] \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = E\left[\text{COV}(r_i, r_j)\right] \quad (\text{A1.8})$$

Demonstra-se assim que, para portfólios muito grandes, as variâncias diminuem de importância quando comparadas com as covariâncias e sempre existe uma variância residual da carteira, que tende à média das covariâncias entre os ativos.

É justamente dessas duas parcelas mostradas na equação A1.7 que se pode classificar o risco como não-sistemático (ou específico) e sistemático (ou conjuntural).

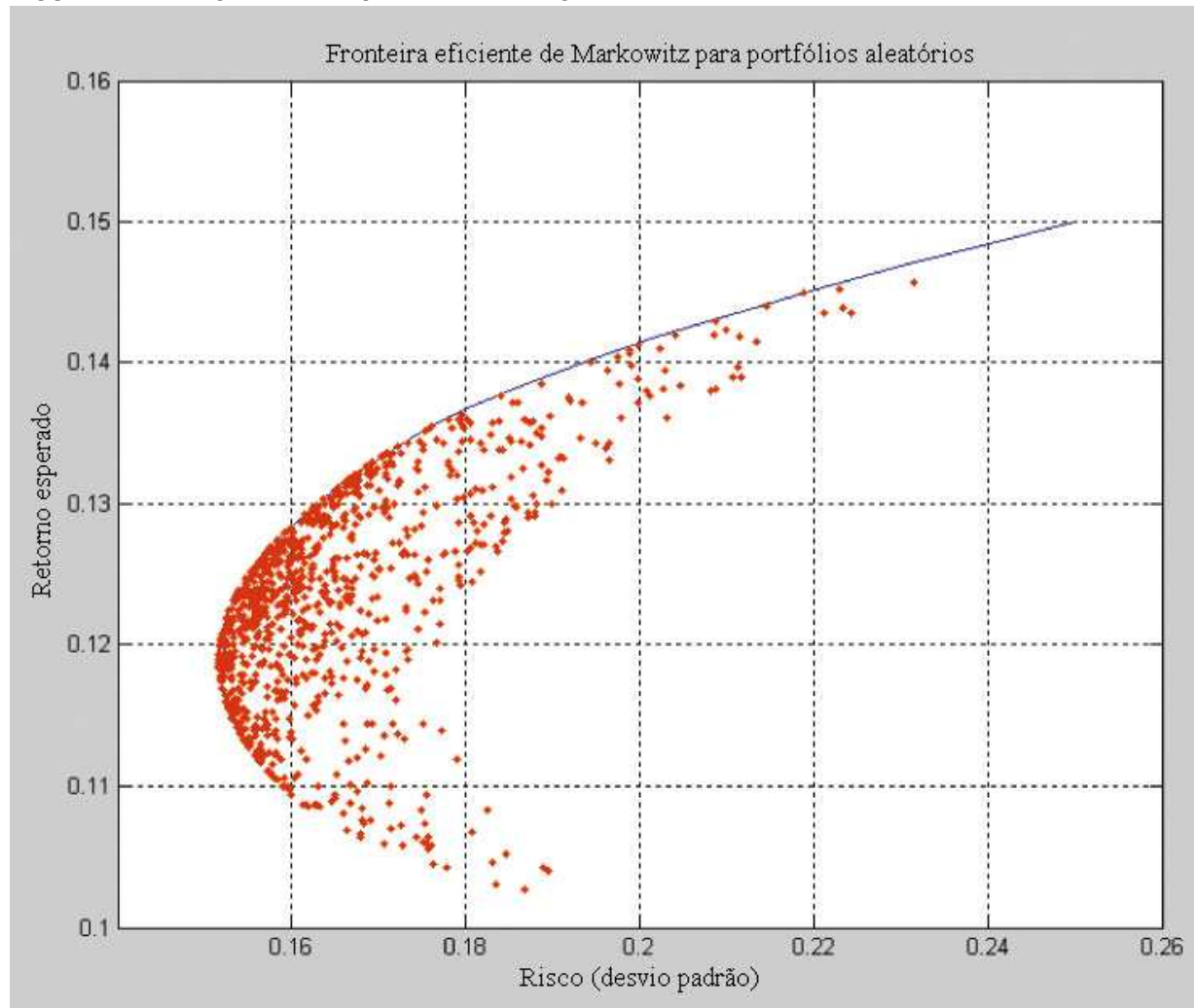
O risco sistemático é aquele que permanece mesmo após a introdução de um grande número de ativos na carteira. É um reflexo dos riscos que os sistemas econômico, político e social impõem aos ativos.

O risco não-sistemático é aquele atribuído a eventos específicos de uma

empresa e que pode ser eliminado por meio da diversificação. Isso porque é gerado por fatos que atingem diretamente o ativo, não influenciando necessariamente os demais ativos.

Da combinação de ativos e pesos é possível formar um conjunto de possibilidades de investimentos, como os representados no diagrama a seguir.

FIGURA A1.1 – FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ



A linha superior em azul recebe o nome de fronteira eficiente de investimento. Isso porque para qualquer opção de retorno desejada, essa fronteira é a que traz o menor risco ou, equivalentemente, para um risco pré-estabelecido, ela é a que fornece o maior retorno esperado.

Matematicamente, a fronteira eficiente de ativos de risco pode ser

encontrada, entre outras formas<sup>13</sup>, pela resolução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & V(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \text{COV}(r_i, r_j) \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\
 & \omega_i \geq \omega_i^{\text{mín}} \\
 & \omega_i \leq \omega_i^{\text{máx}}
 \end{aligned} \tag{A1.9}$$

---

<sup>13</sup> Outra maneira pode ser vista em Caldeira (2005).

## APÊNDICE 2 – MERCADO EFICIENTE E RETORNO LOGARÍTMICO

Em um mercado eficiente, o preço atual reflete toda a informação disponível. Ou seja, o passado não contém qualquer informação que já não esteja incorporada no preço atual. Dessa forma, o preço dos ativos varia com a chegada e novas informações, em flutuações imprevisíveis que podem ser descritas probabilisticamente. A moderna teoria dos portfólios faz essa descrição através de um processo estocástico no qual o preço  $S$  é modelado por  $S(t+1) = S(t) + \varepsilon$ , em que  $\varepsilon$  representa uma variação aleatória.

O processo utilizado é conhecido como movimento browniano, uma versão em tempo contínuo do *random walk*. Inicialmente usado em física para modelar o movimento das moléculas, sua representação matemática é:

$$\begin{aligned} dS &= \mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt} \\ dS &\sim N(\mu dt; \sigma^2 dt) \end{aligned} \tag{A2.1}$$

onde  $S$  é o preço do ativo,  $\mu$  a sua média e  $\sigma$  seu desvio padrão.

Esse é o modelo aditivo, porque a variável cresce (ou decresce) de um valor constante a cada intervalo de tempo. Isso gera problemas na modelagem de preços pois a variável não deve assumir valores negativos, apesar de o modelo permitir isso. Também a taxa de retorno diminui conforme o preço aumenta e o desvio padrão é constante ao longo do tempo e independente do preço do ativo.

Para corrigir essas distorções usa-se um modelo multiplicativo, conhecido como movimento browniano geométrico. Nele, ocorre a combinação de duas parcelas: um crescimento proporcional com taxa  $\mu$  e um crescimento aleatório proporcional com distribuição gaussiana e desvio padrão  $\sigma$ . Sua representação matemática é dada por:

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S \varepsilon \sqrt{dt} \\ dS/S &= \mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt} \\ dS/S &\sim N(\mu dt; \sigma^2 dt) \end{aligned} \tag{A2.2}$$



Com isso, ao invés de modelar o preço, se modela a razão  $dS/S$ . Portanto, o retorno composto bruto para um período  $n$ ,  $r_t = \Delta S_t/S_{t-1}$ , é um candidato natural para ser modelado dessa maneira. Na prática, é preferível trabalhar com retorno, que são livres de escala, do que com preços. Isso porque os retornos “têm propriedades estatísticas mais interessantes (como estacionariedade e ergodicidade)” (MORETTIN e TOLOI, 2006, p. 10).

Apesar disso, os retornos dados por  $r_t = \Delta S_t/S_{t-1}$  não apresentam as propriedades ideais. Definidos assim, retornos positivos e negativos não possuem o mesmo significado, provocando uma assimetria (retornos negativos tem limite de 100%, retornos positivos podem ser infinitos). Portanto, seja  $r_t$  o retorno bruto dado por

$$r_t = \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$

$$1 + r_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

$$\ln(1 + r_t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

define-se o retorno logarítmico como  $R_t = \ln(1 + r_t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ . (A2.3)

De maneira equivalente, poderia se pensar nos preços como continuamente capitalizados a uma determinada taxa de juros. Na capitalização composta tem-se  $S_t = S_{t-1}(1 + r)$ . A troca da capitalização composta<sup>14</sup> por uma capitalização contínua equivale a fragmentar a taxa  $x$  em  $n$  parcelas, de maneira que  $S_t = S_{t-1}(1 + x/n)^n$ . Fazendo com que  $n$  tenda para o infinito:

---

<sup>14</sup> Nas demonstrações aqui feitas foi utilizada a taxa de juro para o um único período, compreendido entre  $S_t$  e  $S_{t-1}$ . De forma perfeitamente análoga poderia se proceder para quaisquer  $n$  períodos, com a capitalização composta sendo dada por  $S_t = S_0(1 + r)^n$  e a contínua por  $S_t = S_0e^{Rn}$ . O cômputo do retorno para  $n$  períodos, que traz um importante resultado estatístico, será feito logo adiante.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t-1} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \\
S_t &= S_{t-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \\
S_t &= S_{t-1} e^x \\
\frac{S_t}{S_{t-1}} &= e^x \\
\ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) &= x = R_t
\end{aligned} \tag{A2.4}$$

Para  $r_t$  pequenos, a diferença observada entre o retorno composto e o retorno logarítimo é mínima, mas em todos os casos  $R_t$  é menor que  $r_t$ . Esses fatos podem ser comprovados pela expansão de Taylor:

$$\begin{aligned}
R_t &= \ln(1 + r_t) \\
R_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} r_t^{n+1} \\
R_t &= r_t - \frac{1}{2} r_t^2 + \frac{1}{3} r_t^3 - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} r_t^{n+1}
\end{aligned}$$

para  $r_t$  suficientemente pequeno para serem desprezados os termos de ordem quadrática em diante

$$R_t \approx r_t \tag{A2.5}$$

É possível definir também retornos multiperíodos. O retorno composto de período  $k$ , entre os instantes  $t-k$  e  $t$ , é dado por:

$$\begin{aligned}
r_t(k) &= \frac{S_t - S_{t-k}}{S_{t-k}} = \frac{S_t}{S_{t-k}} - 1 \\
1 + r_t(k) &= \frac{S_t}{S_{t-k}}
\end{aligned} \tag{A2.6}$$

e em termos de retornos de um período:

$$1 + r_t(k) = (1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \dots (1 + r_{t-k+1}) \tag{A2.7}$$

Por sua vez, aplicando a relação A2.3 em A2.7 e usando as propriedades de logaritmo, o retorno logarítmico para múltiplos períodos fica:

$$\begin{aligned}
 1 + r_t(k) &= (1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \dots (1 + r_{t-k+1}) \\
 \ln[1 + r_t(k)] &= \ln[(1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \dots (1 + r_{t-k+1})] \\
 R_t(k) &= \ln(1 + r_t) + \ln(1 + r_{t-1}) + \dots + \ln(1 + r_{t-k+1}) \\
 R_t(k) &= R_t + R_{t-1} + \dots + R_{t-k+1} \\
 R_t(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} R_{t-i}
 \end{aligned} \tag{A2.8}$$

A equação A2.8 é particularmente interessante, pois para  $k$  relativamente grande a soma pode ser aproximada de uma variável aleatória gaussiana usando o teorema central do limite.

### APÊNDICE 3 – ENTROPIA DE RÉNYI E DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

A entropia de Rényi é dada por<sup>15</sup>

$$H_{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \ln \left( \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} \right) \quad (\text{A3.1})$$

Para  $\alpha = 1$  seu resultado é a indefinição  $0/0$ . Assim, o limite da entropia de Rényi quando  $\alpha \rightarrow 1$  pode ser encontrado pela regra de l'Hôpital:

$$\lim_{\alpha \rightarrow k} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow k} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad (\text{A3.2})$$

fazendo  $f(\alpha) = \ln \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha}$  e  $g(\alpha) = 1 - \alpha$ :

$$g' = -1$$

$$f' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i^{\alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\alpha} (p_i^{\alpha})$$

a derivada  $\frac{d}{d\alpha} p_i^{\alpha}$  é:

$$\frac{d}{d\alpha} p_i^{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha \ln p_i} = e^{\alpha \ln p_i} \frac{d}{d\alpha} \alpha \ln p_i = p_i^{\alpha} \ln p_i$$

$$f' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i^{\alpha}} \sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} \ln p_i$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = - \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

como  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_{\alpha} = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (\text{A3.3})$$

que é a entropia de Shannon.

---

<sup>15</sup> A base logarítmica é indiferente, foi adotado o logaritmo natural apenas para simplicidade da demonstração.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz, necessária para os desenvolvimentos da entropia de Rényi, pode ser enunciada da seguinte forma: “Sejam  $u$  e  $v$  são dois vetores quaisquer no espaço vetorial  $V$  munido de um produto interno, então  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ .”

Uma demonstração para esse enunciado é:

Para  $v = 0$ , então,  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| = 0$

Para  $v \neq 0$ , seja  $p$  a projeção vetorial de  $u$  sobre  $v$ , ou seja,  $\|p\| = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|}$ , portanto  $p$  é ortogonal a  $u - p$ . Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\|p\|^2 + \|u - p\|^2 &= \|u\|^2 \\ \|p\|^2 &= \|u\|^2 - \|u - p\|^2 \\ \frac{(\langle u, v \rangle)^2}{\|v\|^2} &= \|u\|^2 - \|u - p\|^2 \\ (\langle u, v \rangle)^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u - p\|^2 \|v\|^2\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}(\langle u, v \rangle)^2 &\leq \|u\|^2 \|v\|^2 \\ |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\| \|v\|\end{aligned}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A partir dela, pode-se encontrar a divergência de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}|\langle u, v \rangle| &\leq \|u\| \|v\| \\ \frac{|\langle u, v \rangle|}{\sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2}} &\leq \frac{\|u\| \|v\|}{\sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2}} \\ \frac{|\langle u, v \rangle|}{\sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2}} &\leq 1\end{aligned}$$

$$\log \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \leq \log 1$$

$$\log \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \leq 0$$

$$-\log \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \geq 0$$

## APÊNDICE 4 – RESULTADOS DA ANÁLISE FATORIAL

QUADRO A4.1 – AUTOVALORES SUPERIORES A 1 A CADA ANO

1999

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	5,63762	25,6255	5,6376	25,6255
2	2,68640	12,2109	8,3240	37,8364
3	2,25769	10,2622	10,5817	48,0987
4	1,88002	8,5456	12,4617	56,6442
5	1,63911	7,4505	14,1008	64,0947
6	1,38791	6,3087	15,4888	70,4034
7	1,24207	5,6458	16,7308	76,0492
8	1,05721	4,8055	17,7880	80,8547

2000

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,91791	22,3541	4,9179	22,3541
2	2,33234	10,6016	7,2503	32,9557
3	1,97885	8,9948	9,2291	41,9505
4	1,84877	8,4035	11,0779	50,3540
5	1,74036	7,9107	12,8182	58,2647
6	1,37689	6,2586	14,1951	64,5233
7	1,13732	5,1696	15,3324	69,6929
8	1,01966	4,6348	16,3521	74,3277

2001

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,69351	21,3341	4,6935	21,3341
2	2,85885	12,9948	7,5524	34,3289
3	2,20707	10,0321	9,7594	44,3611
4	1,67234	7,6016	11,4318	51,9626
5	1,59654	7,2570	13,0283	59,2196
6	1,37642	6,2565	14,4047	65,4761
7	1,16116	5,2780	15,5659	70,7541
8	1,02549	4,6613	16,5914	75,4154

2002

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,64174	21,0988	4,6417	21,0988
2	3,51551	15,9796	8,1573	37,0784
3	2,15419	9,7918	10,3114	46,8702
4	1,69333	7,6970	12,0048	54,5672
5	1,44024	6,5465	13,4450	61,1137
6	1,37511	6,2505	14,8201	67,3642
7	1,24951	5,6796	16,0696	73,0438
8	1,13288	5,1494	17,2025	78,1932
9	1,01906	4,6321	18,2216	82,8253

2003

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	5,0160	22,800	5,016	22,800
2	2,7548	12,522	7,771	35,322
3	2,0531	9,332	9,824	44,654
4	1,6427	7,467	11,467	52,121
5	1,4446	6,566	12,911	58,687
6	1,2999	5,909	14,211	64,596
7	1,0551	4,796	15,266	69,392
8	1,0285	4,675	16,295	74,067
9	1,0011	4,551	17,296	78,618

2004

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	5,50183	25,0083	5,5018	25,0083
2	3,31550	15,0704	8,8173	40,0788
3	2,06384	9,3811	10,8812	49,4598
4	1,81763	8,2620	12,6988	57,7218
5	1,76427	8,0194	14,4631	65,7412
6	1,38668	6,3031	15,8497	72,0443
7	1,10491	5,0223	16,9547	77,0666
8	1,02447	4,6567	17,9791	81,7233

2005

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,8096	21,862	4,810	21,862
2	2,6016	11,826	7,411	33,687
3	2,1129	9,604	9,524	43,291
4	1,7733	8,060	11,297	51,352
5	1,5397	6,999	12,837	58,350
6	1,3428	6,103	14,180	64,454
7	1,1093	5,042	15,289	69,496
8	1,0230	4,650	16,312	74,146

2006

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,32731	19,6696	4,3273	19,6696
2	3,10673	14,1215	7,4340	33,7911
3	2,61886	11,9039	10,0529	45,6950
4	1,74081	7,9128	11,7937	53,6078
5	1,32699	6,0318	13,1207	59,6395
6	1,16148	5,2795	14,2822	64,9190
7	1,04913	4,7688	15,3313	69,6877
8	1,01073	4,5942	16,3420	74,2819

2007

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,479649	20,36204	4,47965	20,36204
2	3,968455	18,03843	8,44810	38,40047
3	2,792287	12,69221	11,24039	51,09269
4	1,597011	7,25914	12,83740	58,35183
5	1,495839	6,79927	14,33324	65,15110



6	1,130751	5,13978	15,46399	70,29088
7	1,050026	4,77284	16,51402	75,06372

2008

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,610262	20,95574	4,61026	20,95574
2	2,910494	13,22952	7,52076	34,18525
3	2,063017	9,37735	9,58377	43,56261
4	1,718165	7,80984	11,30194	51,37245
5	1,683411	7,65187	12,98535	59,02431
6	1,544647	7,02112	14,53000	66,04543
7	1,067264	4,85120	15,59726	70,89663
8	1,056434	4,80197	16,65369	75,69861

2009

	Autovalor	% total da variância	Autovalores acumulados	% Acumulada
1	4,536393	20,61997	4,53639	20,61997
2	4,038794	18,35815	8,57519	38,97812
3	3,393681	15,42582	11,96887	54,40394
4	1,704497	7,74771	13,67336	62,15166
5	1,501146	6,82339	15,17451	68,97505
6	1,220411	5,54732	16,39492	74,52237
7	1,035749	4,70795	17,43067	79,23032
8	1,003453	4,56115	18,43412	83,79147

## QUADROS A4.2 – MATRIZ $\hat{L}$ – PESOS (*LOADINGS*) DAS VARIÁVEIS EM CADA FATOR ANO A ANO

1999

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	0,0209	0,0131	0,0609	0,0994	-0,0429	0,1499	-0,7769	0,1137
DY	0,3782	-0,5031	0,2139	-0,0260	0,0276	-0,0564	-0,0830	0,4085
P/L	-0,0410	0,1487	0,2368	0,3894	0,0559	0,2921	0,2202	0,0641
P/V	0,1746	0,0176	0,0334	0,0481	-0,8910	0,0243	-0,0971	0,0227
P/VC	0,0343	-0,1259	-0,0148	0,9564	0,0086	-0,0361	-0,1745	0,0164
P/VCT	0,0343	-0,1259	-0,0148	0,9564	0,0086	-0,0361	-0,1745	0,0164
P/CGL	-0,1345	0,0972	0,0942	0,1830	0,0228	0,0280	-0,7855	-0,1557
ROE	-0,2334	-0,2822	-0,7650	0,1285	-0,0022	0,0219	0,0784	-0,1808
ROA	-0,1833	0,1422	-0,8783	-0,0084	0,0067	-0,0269	0,0544	0,0848
ROC	-0,1280	0,1036	-0,8282	-0,1393	0,0273	0,0647	0,0366	0,1632
ML	-0,1765	-0,0398	-0,0227	-0,0875	-0,8736	-0,1148	0,0882	0,0146
MCL	-0,0809	0,0662	-0,1464	0,0594	-0,0398	-0,0012	0,0417	0,9020
LC	0,9018	0,0374	0,1446	0,0201	0,0895	-0,1859	0,0780	0,0063
LS	0,9417	0,0187	0,1732	0,0434	-0,0433	0,0360	-0,0066	-0,0233
LG	0,6805	0,0071	0,1191	-0,0149	0,0382	-0,6360	0,0136	0,0747
LI	0,8513	0,0359	0,1935	0,0109	-0,1351	0,1767	0,0331	-0,0433
GE	-0,1431	-0,9307	-0,1511	0,0897	-0,0098	0,0576	0,1009	-0,0691
PCTRT	-0,5308	-0,0460	-0,5304	0,0046	-0,0790	0,2487	0,3459	0,1233
GCPCT	0,5056	0,1575	0,1736	-0,2189	0,1307	-0,4475	-0,4002	0,0073
CP	-0,0176	0,0312	0,0371	0,0345	-0,1381	-0,8904	0,1775	-0,0044
LGM	0,7129	0,0587	0,0276	0,0444	0,0726	-0,6120	0,1256	0,0134

GEM	-0,0636	-0,9290	0,1124	0,1051	-0,0218	0,0183	0,0511	-0,0411
-----	---------	---------	--------	--------	---------	--------	--------	---------

2000

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	0,0024	0,1884	-0,0222	0,0531	-0,0240	0,0915	-0,6494	-0,0035
DY	-0,2868	-0,0900	0,1366	0,1108	-0,0531	-0,3244	-0,2930	0,1644
P/L	0,0265	-0,0110	0,0415	0,1214	-0,0021	0,1933	0,0815	-0,6603
P/V	0,0241	0,0329	0,0819	0,0110	0,9804	0,0352	0,0059	0,0069
P/VC	0,0316	0,9885	0,0148	-0,0580	0,0071	0,0599	-0,0644	0,0031
P/VCT	0,0316	0,9885	0,0148	-0,0580	0,0071	0,0599	-0,0644	0,0031
P/CGL	0,0459	-0,0481	0,0298	-0,0008	0,0061	0,0046	-0,7421	-0,0138
ROE	0,0704	0,0133	-0,8503	-0,2522	0,0326	0,0306	-0,0236	0,0017
ROA	0,0694	-0,0028	-0,8950	0,1020	0,0868	-0,0787	0,0196	0,0479
ROC	0,1170	-0,0316	-0,6362	0,1055	-0,0256	0,0640	0,0340	0,0107
ML	0,1087	-0,0207	-0,1727	-0,0000	0,9659	-0,0118	0,0264	0,0224
MCL	-0,0197	-0,0037	-0,0148	0,1448	0,0244	0,1369	0,0874	0,7592
LC	-0,9218	0,0560	0,0870	0,0615	-0,0739	-0,1076	0,1174	0,0234
LS	-0,9328	0,0313	0,0515	0,0878	-0,0389	0,0552	0,0597	0,0161
LG	-0,6789	0,0225	0,0688	0,0401	-0,0748	-0,6066	0,0624	0,0153
LI	-0,8539	-0,0507	0,0860	0,0895	-0,0585	0,0953	0,0648	0,0640
GE	0,1788	0,0511	-0,0347	-0,9336	-0,0182	0,0546	0,0568	-0,0140
PCTRT	0,5252	0,0383	-0,2218	0,1214	0,0050	-0,0906	0,2286	0,0322
GCPCT	-0,5969	-0,0934	-0,0105	0,2631	0,0355	-0,1504	-0,1799	-0,0136
CP	0,0519	-0,0936	-0,0188	0,0343	0,0138	-0,9219	0,0942	0,0199
LGM	-0,7391	-0,0433	-0,0309	0,0469	-0,0089	-0,5815	0,1057	0,0098
GEM	0,0852	0,0579	0,0545	-0,9365	0,0078	0,0235	0,0166	-0,0112

2001

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0543	0,0199	0,0580	-0,0116	-0,1154	-0,1202	-0,8026	0,0775
DY	-0,0769	-0,0592	-0,0432	0,0473	-0,1781	0,1303	-0,1146	-0,6844
P/L	0,0816	0,0022	-0,0686	0,0486	-0,1861	0,0371	-0,1958	0,5918
P/V	-0,1614	0,0114	-0,1034	0,0322	0,8548	-0,1100	-0,0398	0,0377
P/VC	0,0547	0,9809	0,0162	-0,0834	-0,0161	-0,0585	-0,0260	0,0329
P/VCT	0,0547	0,9809	0,0162	-0,0834	-0,0161	-0,0585	-0,0260	0,0329
P/CGL	0,1610	0,0165	-0,0959	0,0527	0,1628	0,0609	-0,7357	-0,0068
ROE	0,0624	0,4778	0,1181	-0,7359	-0,0134	-0,0071	0,0084	0,0079
ROA	-0,0190	0,0097	0,9227	0,0203	-0,0451	0,1080	-0,0228	0,0330
ROC	0,0842	0,0359	0,7773	0,0227	0,1207	0,0383	-0,0191	-0,0263
ML	0,1573	-0,0482	0,2874	-0,0777	0,8000	0,1020	-0,0017	-0,0045
MCL	0,0662	-0,0012	-0,0474	0,0158	-0,0189	-0,0718	0,0084	-0,4791
LC	-0,9479	-0,0473	-0,0727	0,0455	0,0037	0,1322	0,0636	0,0012
LS	-0,9551	-0,0294	-0,0787	0,0346	0,0703	0,0711	0,0165	0,0014
LG	-0,6001	-0,0209	-0,0587	0,0371	-0,0562	0,7283	0,0165	-0,0234
LI	-0,8508	-0,0505	-0,1474	0,0624	0,0122	-0,0009	0,0114	-0,0278
GE	0,0945	0,5385	0,0021	-0,8181	0,0290	-0,0398	0,0479	0,0152
PCTRT	0,2733	0,0057	0,7617	-0,0546	0,0483	-0,2602	0,1239	0,0785
GCPCT	-0,2107	0,0076	-0,0784	0,0803	0,0838	0,7026	-0,0969	-0,0032
CP	0,1052	-0,1106	0,0853	-0,0792	-0,0575	0,7998	0,1421	0,0739
LGM	-0,6963	-0,0521	0,0128	0,0333	-0,1212	0,5949	0,0878	-0,0542
GEM	0,0469	-0,2260	-0,0859	-0,9177	0,0313	-0,0046	0,0166	0,0147

2002

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PM	-0,0553	0,0116	0,0131	0,0754	0,0166	-0,7846	0,0159	-0,1817	0,0784
DY	-0,1829	0,1017	0,2564	0,2019	0,1984	-0,1660	0,0298	0,3920	0,2590

P/L	0,0356	0,0322	0,0893	-0,0621	-0,0507	-0,8004	-0,0152	0,1438	-0,1460
P/V	0,0375	-0,0089	0,1457	-0,1156	0,9330	0,0185	0,0278	-0,0221	0,0020
P/VC	0,0108	-0,9804	0,0019	0,0158	0,0038	0,0017	0,1531	0,0107	-0,0014
P/VCT	0,0108	-0,9804	0,0019	0,0158	0,0038	0,0017	0,1531	0,0107	-0,0014
P/CGL	0,0319	-0,0028	0,0766	-0,2599	-0,0091	-0,3511	0,0948	-0,5368	0,2074
ROE	0,0497	-0,8820	-0,0704	0,0346	-0,0258	0,0409	-0,3670	-0,0227	0,0109
ROA	0,2037	0,0196	-0,8964	0,0030	0,0480	0,0120	-0,0058	0,1390	0,0229
ROC	-0,0436	-0,0727	-0,6650	0,0737	0,0125	0,0832	0,0650	-0,1517	0,0480
ML	0,1167	0,0333	-0,4338	0,0047	0,8343	0,0277	-0,0243	0,0665	-0,0070
MCL	-0,0128	0,0109	0,0572	0,0241	0,0124	-0,0533	0,0167	-0,0287	-0,9406
LC	-0,9393	0,0237	0,1548	-0,1277	-0,0976	-0,0299	-0,0017	0,0725	0,0077
LS	-0,9500	0,0439	0,1383	-0,0919	-0,0151	-0,0361	0,0273	-0,0747	-0,0117
LG	-0,3905	0,0341	0,1626	-0,8371	0,0703	0,0072	-0,0063	0,1801	0,0094
LI	-0,9490	0,0254	0,0939	0,0038	0,0082	0,0241	0,0139	-0,0616	-0,0159
GE	0,0497	-0,8428	-0,0003	0,0407	-0,0202	0,0361	-0,5095	-0,0352	-0,0079
PCTRT	0,3383	0,0277	-0,8066	0,0859	0,0552	0,0176	-0,0186	0,0751	-0,0428
GCPCT	-0,0717	0,0549	0,0314	-0,9200	0,0644	-0,0053	0,0098	-0,0189	-0,0009
CP	0,0079	-0,0282	-0,0620	-0,3704	-0,0186	-0,0311	0,0912	0,7692	0,0991
LGM	-0,7413	0,0060	0,1045	-0,3014	-0,0789	0,0241	0,0421	0,4442	0,0528
GEM	0,0346	-0,1035	0,0533	0,0066	-0,0063	0,0046	-0,9788	-0,0283	0,0124

2003

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PM	0,0003	0,6208	-0,0515	0,2106	-0,0325	-0,3220	0,0770	0,1291	-0,0260
DY	0,2405	-0,0463	0,1182	0,1101	0,2645	-0,0287	0,2721	0,0608	0,3923
P/L	-0,0118	-0,0259	0,0373	0,0204	0,0750	-0,0492	0,0821	0,0104	-0,9337
P/V	-0,0151	-0,0426	0,0614	-0,0334	-0,8300	0,0823	0,0590	0,1813	-0,0000
P/VC	0,0159	0,9270	0,0826	-0,2019	0,0602	0,1557	-0,0103	-0,0659	0,0151
P/VCT	0,0159	0,9270	0,0826	-0,2019	0,0602	0,1557	-0,0103	-0,0659	0,0151
P/CGL	-0,1152	-0,0793	0,0532	-0,0930	0,1107	0,1320	-0,5733	0,0237	0,0072
ROE	-0,0728	0,1051	-0,1289	-0,4927	-0,1057	-0,0936	0,0397	-0,7419	-0,0096
ROA	-0,1127	-0,0557	-0,8978	0,0519	-0,0397	0,0135	0,0363	-0,3529	-0,0028
ROC	-0,0956	-0,0291	-0,0629	0,1245	0,0151	0,0053	0,0027	-0,8669	-0,0097
ML	-0,1200	-0,0473	-0,0800	0,1447	-0,7472	-0,0017	0,0189	-0,2948	0,0157
MCL	0,0782	0,0487	-0,0229	0,0576	-0,0474	-0,1617	-0,8011	0,0047	0,0123
LC	0,9236	0,0196	0,1233	0,0321	0,1344	0,0130	0,0196	0,0544	0,0111
LS	0,9438	0,0597	0,1006	0,0063	0,0578	-0,1322	-0,0046	0,0737	0,0369
LG	0,7567	-0,0062	0,1473	0,0623	-0,0492	0,5098	0,0215	0,0425	0,0301
LI	0,9051	0,0415	0,0883	-0,0148	0,0480	-0,1189	0,0002	0,0533	0,0456
GE	-0,2765	0,1554	0,0593	-0,8242	-0,0600	-0,0267	-0,0746	-0,1768	-0,0099
PCTRT	-0,1540	-0,0617	-0,9480	0,0141	0,0153	0,0610	-0,0018	0,1032	-0,0053
GCPCT	0,6479	-0,1446	-0,1023	0,2777	-0,0309	0,2252	0,0879	0,0490	0,0247
CP	0,1252	0,0978	-0,1088	0,1148	-0,0899	0,9022	0,0072	0,0527	0,0286
LGM	0,7895	0,0478	0,0321	0,0350	0,0191	0,5171	0,0423	-0,0107	0,0352
GEM	0,0446	0,0537	0,0207	-0,8832	0,1442	-0,0751	-0,0057	0,1220	-0,0154

2004

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0877	0,0478	0,0744	0,0961	-0,2061	0,3534	0,3292	-0,4882
DY	0,0325	0,0565	-0,0003	-0,0776	-0,0112	-0,0844	0,9039	0,0119
P/L	-0,0807	-0,2463	-0,0604	0,0359	0,1294	0,2353	-0,0776	-0,6977
P/V	0,0148	-0,1036	0,9792	-0,0446	0,0388	0,0973	-0,0137	0,0053
P/VC	-0,0056	0,2779	0,0506	-0,0618	-0,0163	0,9118	-0,0401	-0,0523
P/VCT	-0,0056	0,2779	0,0506	-0,0618	-0,0163	0,9118	-0,0401	-0,0523
P/CGL	-0,1370	-0,1402	0,0235	0,2962	-0,3407	0,2850	0,0138	0,2481
ROE	0,0534	0,8558	-0,0138	-0,0734	-0,0139	0,3698	0,0255	0,0111

ROA	0,2253	0,8853	0,0257	0,2289	0,0533	0,1044	-0,0070	0,0127
ROC	0,1629	0,8882	-0,0159	0,0542	0,1985	0,2248	0,0419	0,0366
ML	0,0611	0,1018	0,9831	-0,0141	0,0162	-0,0154	0,0121	0,0046
MCL	0,0467	0,2528	0,0213	-0,0424	-0,2090	-0,2320	-0,0674	-0,5172
LC	0,8708	0,1826	-0,0403	0,1451	0,1948	-0,0030	0,0632	-0,0095
LS	0,9694	0,0889	0,0513	0,0784	0,0032	0,0285	0,0265	0,0172
LG	0,5130	0,1143	0,0151	0,1572	0,7486	-0,0760	0,1191	0,0301
LI	0,9354	0,1160	0,0713	0,0650	0,0020	-0,0095	-0,0646	0,0174
GE	-0,0840	-0,0937	0,0222	-0,9322	-0,0852	0,0157	0,0304	-0,0020
PCTRT	-0,3156	0,2143	0,0764	-0,4816	-0,3397	-0,1486	-0,3598	-0,1082
GCPCT	0,5707	0,0023	0,0022	0,5379	0,2639	-0,1325	0,2359	0,1134
CP	-0,1695	0,0177	0,0481	0,0922	0,9306	0,0320	-0,0573	-0,0050
LGM	0,5362	0,2372	0,0308	0,0966	0,7510	-0,0577	-0,0158	-0,0010
GEM	-0,1595	-0,1084	0,0371	-0,9085	-0,0733	0,1031	0,0896	0,0574

2005

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0121	0,1525	0,0376	0,1841	0,3249	-0,2649	0,1522	0,2244
DY	0,0959	0,1127	-0,1045	0,1939	0,2061	0,1732	0,5772	0,0040
P/L	-0,0175	-0,0293	-0,0611	-0,0700	-0,1148	0,0166	-0,0855	-0,3477
P/V	-0,0695	-0,0118	0,9769	0,0376	-0,0480	0,0371	-0,0172	-0,0116
P/VC	0,0656	0,9781	-0,0288	0,0378	-0,0909	0,0027	0,0194	0,0263
P/VCT	0,0656	0,9781	-0,0288	0,0378	-0,0909	0,0027	0,0194	0,0263
P/CGL	-0,1779	0,2862	-0,0204	0,2876	0,3835	-0,3396	-0,2495	0,1151
ROE	0,0029	0,1881	-0,0403	-0,0807	-0,4815	-0,0566	-0,0302	0,6618
ROA	-0,1963	-0,0143	-0,0246	-0,8616	0,1132	-0,0085	-0,0471	0,3126
ROC	-0,1875	-0,1145	-0,0824	-0,2554	-0,0557	0,0590	-0,0762	0,7376
ML	-0,0909	-0,0449	0,9721	-0,0255	-0,0304	0,0422	-0,0248	0,0285
MCL	0,0144	-0,0525	0,0351	-0,0501	-0,0307	-0,0972	0,7962	0,0594
LC	0,9156	0,0483	-0,1001	0,1536	0,1164	0,1197	0,0596	-0,0535
LS	0,9454	0,0330	-0,0717	0,1366	0,1216	-0,0006	0,0130	-0,0409
LG	0,5764	-0,0087	0,0646	0,2623	0,1542	0,6750	0,0172	-0,0562
LI	0,9092	0,0681	-0,0641	0,1124	0,0943	-0,0140	0,0662	-0,0592
GE	-0,1812	0,1328	0,0273	0,1115	-0,8355	-0,1443	-0,0696	0,1287
PCTRT	-0,2298	-0,0563	0,0096	-0,8679	0,0465	-0,0866	-0,0581	-0,1094
GCPCT	0,2924	-0,1454	0,0267	0,0366	0,4216	0,4610	-0,1453	0,1065
CP	-0,2047	0,0818	0,0360	0,0308	0,0415	0,8768	0,0547	-0,0001
LGM	0,5891	-0,0169	0,0613	-0,0277	0,1211	0,6970	0,0304	-0,0058
GEM	-0,1709	0,0685	0,0901	0,1094	-0,7169	-0,0847	-0,0803	-0,0384

2006

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	0,0044	0,0211	0,1548	-0,1230	0,0820	0,1459	-0,5887	-0,0908
DY	0,1729	0,0815	0,0076	0,1977	0,1298	0,0713	-0,0788	-0,6337
P/L	0,2963	0,0612	0,2250	-0,1996	0,1911	0,1148	0,1637	0,5259
P/V	-0,0762	-0,3507	-0,0478	0,0687	0,2674	-0,5317	0,0428	0,0906
P/VC	0,0633	0,0507	0,9098	0,0325	-0,1970	-0,0799	-0,0419	-0,0200
P/VCT	-0,0397	-0,0104	0,8404	0,0411	0,0622	0,0358	-0,0403	0,0228
P/CGL	0,0422	0,0257	0,1090	-0,3518	0,0390	0,0902	0,1735	-0,6182
ROE	0,0116	0,0179	0,4079	-0,0627	-0,8144	-0,2400	0,0097	-0,0292
ROA	-0,0082	-0,9740	-0,0238	-0,0425	-0,0615	0,0313	0,0098	0,0277
ROC	-0,0655	-0,0604	-0,1419	-0,0473	-0,7966	0,1636	0,0480	0,0864
ML	0,1344	-0,9027	-0,0057	-0,0667	0,0273	-0,0915	0,0053	-0,0021
MCL	0,0519	0,0100	-0,0752	0,0392	-0,0286	-0,0777	-0,7907	0,0590
LC	0,9236	-0,1205	-0,0130	0,2065	0,0362	0,0489	-0,0508	-0,0495
LS	0,9432	-0,1956	0,0036	0,0666	0,0360	0,0480	-0,0263	-0,0304

LG	0,5111	0,1679	0,0057	0,7389	0,1605	-0,1285	0,0573	-0,0604
LI	0,9138	0,1925	0,0165	0,0835	-0,0115	0,1006	-0,0187	-0,0079
GE	-0,0877	0,0592	0,4933	-0,1298	-0,5542	-0,4571	0,0252	0,0263
PCTRT	-0,0287	-0,9558	-0,0236	-0,0564	-0,0132	0,0141	0,0144	0,0379
GCPCT	0,3331	-0,0582	-0,1559	0,5548	0,2112	0,1161	-0,0882	-0,1424
CP	-0,2485	0,1225	0,1761	0,8008	-0,0601	0,0939	0,1326	0,0052
LGM	0,4829	0,0178	-0,0035	0,8041	0,0208	0,0329	0,0378	0,0142
GEM	-0,0920	0,0730	0,0670	-0,0947	-0,1337	-0,7707	0,0308	0,0219

2007

Fator	1	2	3	4	5	6	7
PM	-0,0745	0,0010	0,0410	-0,0622	0,0360	0,4180	-0,5276
DY	0,1371	0,0638	0,0112	0,1115	0,0967	0,0681	-0,7489
P/L	0,0581	0,0273	0,2679	0,1898	0,1828	0,4320	0,5298
P/V	0,0903	-0,9643	0,0192	-0,0513	0,0099	-0,0148	0,0202
P/VC	0,0124	0,0351	0,9426	0,0285	-0,0790	0,1260	0,0248
P/VCT	0,0281	0,0424	0,9382	0,0354	-0,0752	0,1483	0,0255
P/CGL	-0,1167	0,0291	0,0932	-0,1462	0,0959	0,7135	-0,0171
ROE	-0,0130	0,0137	0,1691	-0,0472	-0,9120	0,0145	-0,0251
ROA	0,0215	-0,9906	-0,0348	-0,0335	-0,0124	0,0033	0,0124
ROC	-0,2748	-0,0243	-0,1934	0,0583	-0,4491	0,1313	0,1709
ML	0,1040	-0,9679	-0,0089	-0,0586	-0,0002	0,0038	0,0113
MCL	-0,0846	0,0108	0,0545	-0,0327	0,1538	-0,3480	0,0720
LC	0,9209	-0,1918	-0,0315	0,1483	0,0621	0,0174	0,0090
LS	0,9226	-0,2650	-0,0425	0,0976	0,0553	0,0121	-0,0416
LG	0,5444	0,1270	-0,0006	0,7403	0,0260	-0,0294	-0,0069
LI	0,9035	0,1994	-0,0113	0,1244	0,0775	-0,0053	-0,0589
GE	-0,0563	0,0178	0,5006	-0,1142	-0,8009	-0,1089	0,0073
PCTRT	-0,0303	-0,9253	-0,0400	-0,0394	0,0055	-0,0194	0,0295
GCPCT	0,4103	-0,0221	-0,1957	0,5967	0,0871	0,2261	-0,0187
CP	-0,2116	0,1116	0,1164	0,8708	0,0090	-0,1244	-0,0018
LGM	0,4992	0,0117	-0,0274	0,7721	0,0152	-0,1015	0,0079
GEM	-0,1529	-0,0276	0,5711	-0,0718	-0,1358	-0,3110	-0,0022

2008

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,1448	-0,0008	-0,0056	0,0212	0,2035	0,0273	-0,0884	-0,3263
DY	0,0139	0,1035	0,0836	0,0968	-0,0947	-0,0462	0,3033	-0,6596
P/L	0,0066	0,0657	0,0848	0,1040	0,0088	0,5339	-0,4259	0,1555
P/V	0,1135	0,0191	0,0013	-0,9298	0,0179	0,0231	-0,0206	0,0332
P/VC	0,0302	-0,2068	-0,0005	-0,0056	0,0348	0,9154	0,0072	-0,0310
P/VCT	0,0322	-0,9192	0,0296	0,0401	0,0349	0,0802	-0,0628	-0,0194
P/CGL	0,1102	0,0006	-0,0330	-0,0660	0,0453	-0,0026	-0,8503	-0,0953
ROE	0,1282	-0,1828	-0,0278	-0,0611	0,0333	0,9026	0,0694	-0,0554
ROA	0,1443	0,0367	-0,9619	-0,1444	-0,0071	0,0089	-0,0623	0,0025
ROC	0,3952	0,0376	-0,0681	-0,2245	-0,1339	0,2007	-0,0803	0,0581
ML	0,1089	0,0267	-0,0792	-0,9340	0,0457	-0,0263	-0,0241	0,0136
MCL	-0,0203	0,0461	0,0231	0,0390	0,0307	-0,0046	0,1550	0,6785
LC	-0,9101	0,0625	0,0887	0,0835	-0,1373	-0,0263	0,0300	0,0151
LS	-0,9351	0,0499	0,0639	0,0528	-0,1311	-0,0191	0,0060	-0,0490
LG	-0,5307	0,0609	0,1454	-0,0531	-0,7186	-0,0620	0,0436	0,0350
LI	-0,8928	0,0457	0,0676	0,0578	-0,1703	-0,0215	0,0445	-0,0485
GE	0,0484	-0,8021	0,0155	0,0042	0,1236	0,3575	0,0886	0,0410
PCTRT	0,0895	0,0142	-0,9709	0,0477	0,0242	-0,0236	0,0357	0,0333
GCPCT	-0,3463	0,1512	-0,0902	-0,0543	-0,6467	-0,1453	-0,2272	-0,1331
CP	0,2612	0,0189	0,0420	0,1786	-0,8401	0,0544	0,1040	0,0808

LGM	-0,4453	0,0529	-0,0505	-0,0389	-0,8105	0,0037	0,0921	0,0170
GEM	0,0558	-0,9687	0,0081	0,0095	0,0323	0,0091	0,0119	0,0184

2009

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	0,0269	-0,0071	0,0063	-0,0030	0,7485	0,0013	-0,0448	-0,1000
DY	-0,0287	-0,0943	0,0354	0,0433	0,2853	0,2660	0,5598	0,2360
P/L	0,0158	-0,0113	0,0298	0,0008	0,0845	0,1045	-0,8609	0,1189
P/V	0,0086	0,0153	-0,7653	0,1349	0,0479	0,0045	0,0471	0,0607
P/VC	0,0536	-0,7436	0,0382	-0,0219	0,0330	0,4842	0,0281	-0,0294
P/VCT	0,0452	-0,9423	0,0201	-0,0143	0,0373	0,1035	-0,0139	0,0013
P/CGL	0,0754	0,0163	0,0319	-0,0850	0,8100	0,0314	0,0984	0,0758
ROE	0,0156	0,9148	0,0077	-0,0002	0,0287	0,3378	-0,0136	-0,0069
ROA	-0,0293	-0,0067	0,9797	0,0833	0,0371	-0,0003	0,0169	0,0213
ROC	-0,0261	0,0289	-0,0291	0,0046	0,0204	0,9300	0,0118	0,0045
ML	-0,0154	-0,0074	0,9709	0,0780	0,0244	-0,0053	0,0171	0,0187
MCL	0,0167	-0,0016	0,0089	0,0082	0,0345	-0,0003	0,0065	-0,9560
LC	-0,9792	0,0311	0,0303	0,1067	-0,0214	-0,0222	-0,0102	0,0160
LS	-0,9855	0,0172	0,0204	0,0444	0,0019	0,0046	-0,0086	0,0168
LG	-0,5604	0,0486	-0,0037	0,7867	-0,0597	-0,0284	0,0354	0,0210
LI	-0,9757	0,0158	0,0342	0,0398	-0,0369	0,0053	0,0232	0,0061
GE	0,0132	-0,9501	0,0065	-0,0330	-0,0233	0,0132	0,0248	0,0067
PCTRT	0,0374	0,0121	-0,9721	-0,0881	-0,0388	0,0048	-0,0150	-0,0207
GCPCT	-0,2148	0,0360	-0,0274	0,7808	0,1396	-0,1031	-0,0906	0,0691
CP	0,2209	-0,0181	0,1541	0,6955	-0,2930	0,1545	0,1207	-0,1167
LGM	-0,6973	0,0394	0,0232	0,5744	-0,1270	0,0703	0,0680	-0,0263
GEM	0,0177	-0,9733	0,0036	-0,0098	-0,0099	-0,0480	0,0242	0,0111

#### QUADRO A4.3 – PROPORÇÃO DA VARIÂNCIA DEVIDO A CADA FATOR

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
1999	0,1953	0,0999	0,1196	0,0976	0,0747	0,0926	0,0779	0,0509	-	0,8085
2000	0,1934	0,0926	0,0939	0,0909	0,0875	0,0820	0,0553	0,0477	-	0,7433
2001	0,1652	0,1147	0,1010	0,0958	0,0696	0,0997	0,0591	0,0489	-	0,7542
2002	0,1641	0,1568	0,1041	0,0885	0,0746	0,0648	0,0649	0,0631	0,0473	0,8283
2003	0,2007	0,1002	0,0842	0,0904	0,0645	0,0687	0,0491	0,0751	0,0470	0,7862
2004	0,1696	0,1282	0,0892	0,1121	0,1132	0,1025	0,0529	0,0496	-	0,8172
2005	0,1644	0,0976	0,0894	0,0857	0,0930	0,1004	0,0508	0,0601	-	0,7415
2006	0,1554	0,1347	0,0964	0,1120	0,0855	0,0589	0,0490	0,0509	-	0,7428
2007	0,1566	0,1769	0,1162	0,1098	0,0820	0,0563	0,0529	-	-	0,7506
2008	0,1561	0,1165	0,0885	0,0861	0,1117	0,0976	0,0515	0,0490	-	0,7570
2009	0,1725	0,1884	0,1576	0,0958	0,0656	0,0614	0,0501	0,0466	-	0,8380
Média	0,1721	0,1279	0,1036	0,0968	0,0838	0,0810	0,0558	0,0542	0,0472	0,7789

QUADROS A4.4 – MATRIZ  $\hat{B} = \left( (\hat{L}'\hat{L})^{-1}\hat{L}' \right)'$  – COEFICIENTES DOS ESCORES FATORIAIS ANO A ANO<sup>16</sup>

1999

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	0,0149	-0,0395	-0,0527	-0,0441	-0,0391	0,0659	-0,4839	0,1260

<sup>16</sup> Retomando a equação 2.58:  $\hat{F} = (\hat{L}'\hat{L})^{-1}\hat{L}'z = \hat{B}'z$

DY	0,0760	-0,2643	0,0575	-0,0821	0,0312	0,0177	-0,0821	0,3833
P/L	-0,0104	0,1356	0,1504	0,2297	0,0312	0,1596	0,2329	0,0638
P/V	0,0786	0,0189	-0,0311	0,0208	-0,5518	0,0587	-0,0654	-0,0099
P/VC	0,0044	0,0219	-0,0286	0,4509	-0,0032	-0,0467	-0,0145	0,0004
P/VCT	0,0044	0,0219	-0,0286	0,4509	-0,0032	-0,0467	-0,0145	0,0004
P/CGL	-0,0590	0,0137	-0,0257	0,0145	-0,0029	-0,0380	-0,4659	-0,1106
ROE	0,0699	-0,1215	-0,3502	0,0467	-0,0036	-0,0139	-0,0340	-0,2154
ROA	0,0774	0,0607	-0,3896	0,0133	0,0025	-0,0223	-0,0547	0,0136
ROC	0,1019	0,0269	-0,3734	-0,0630	0,0156	0,0428	-0,0777	0,0907
ML	-0,0557	-0,0044	0,0239	-0,0273	-0,5256	-0,0788	0,0228	-0,0073
MCL	-0,0428	0,0292	0,0171	0,0241	0,0025	-0,0117	-0,0039	0,8100
LC	0,2508	0,0036	-0,0693	0,0231	0,0385	0,0490	0,0718	-0,0223
LS	0,3043	-0,0034	-0,0808	0,0192	-0,0499	0,1875	0,0273	-0,0512
LG	0,0958	-0,0221	-0,0344	0,0061	0,0229	-0,2609	0,0028	0,0500
LI	0,2980	0,0110	-0,0566	0,0073	-0,1065	0,2590	0,0558	-0,0677
GE	0,0111	-0,4309	-0,0606	-0,0380	0,0102	-0,0010	-0,0073	-0,0610
PCTRT	-0,0474	0,0113	-0,1325	0,0306	-0,0354	0,0781	0,1639	0,0819
GCPCT	0,0559	0,0059	-0,0296	-0,1328	0,0711	-0,1882	-0,2638	0,0167
CP	-0,1702	0,0212	0,0633	0,0650	-0,0647	-0,5297	0,0954	-0,0088
LGM	0,1283	0,0157	-0,0774	0,0543	0,0404	-0,2359	0,0795	-0,0185
GEM	-0,0156	-0,4307	0,0545	-0,0347	0,0042	-0,0189	-0,0108	-0,0175

2000

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0140	0,0498	-0,0426	0,0086	-0,0060	0,0136	-0,5285	-0,0075
DY	-0,0168	-0,0408	0,0513	0,0093	-0,0110	-0,1733	-0,2597	0,1382
P/L	-0,0245	-0,0004	-0,0043	0,0936	0,0096	0,0968	0,0814	-0,6308
P/V	-0,0291	0,0099	0,0821	-0,0047	0,5225	0,0132	-0,0014	-0,0087
P/VC	0,0033	0,4946	0,0009	0,0301	-0,0007	-0,0368	0,0138	0,0005
P/VCT	0,0033	0,4946	0,0009	0,0301	-0,0007	-0,0368	0,0138	0,0005
P/CGL	0,0063	-0,0752	-0,0125	-0,0372	0,0143	-0,0397	-0,6279	-0,0158
ROE	-0,0712	-0,0084	-0,4344	-0,1398	-0,0147	0,0299	-0,0659	-0,0226
ROA	-0,0326	0,0151	-0,4444	0,0477	0,0053	-0,0286	-0,0203	0,0043
ROC	-0,0143	-0,0079	-0,3173	0,0600	-0,0458	0,0500	0,0102	-0,0111
ML	-0,0179	-0,0121	-0,0396	-0,0098	0,5014	-0,0155	-0,0002	-0,0023
MCL	0,0086	-0,0023	0,0235	0,0595	-0,0066	0,1308	0,0924	0,7352
LC	-0,2371	0,0415	-0,0205	-0,0303	-0,0024	0,0577	0,0958	-0,0059
LS	-0,2654	0,0155	-0,0372	-0,0201	0,0156	0,1633	0,0530	-0,0094
LG	-0,1028	0,0545	0,0012	-0,0344	-0,0107	-0,2957	0,0221	-0,0286
LI	-0,2433	-0,0286	-0,0210	-0,0179	0,0027	0,1853	0,0568	0,0435
GE	-0,0306	-0,0300	-0,0147	-0,4810	-0,0038	-0,0022	0,0069	0,0208
PCTRT	0,1610	0,0530	-0,0580	0,1163	-0,0331	-0,1105	0,1935	0,0316
GCPCT	-0,1378	-0,0376	-0,0508	0,0769	0,0418	-0,0152	-0,1598	-0,0471
CP	0,1418	0,0228	0,0280	0,0079	0,0047	-0,5850	0,0272	-0,0202
LGM	-0,1337	0,0222	-0,0509	-0,0390	0,0225	-0,2621	0,0500	-0,0390
GEM	-0,0483	-0,0286	0,0241	-0,4916	0,0178	-0,0146	-0,0259	0,0221

2001

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0831	-0,0341	0,0880	-0,0652	-0,1046	-0,0672	-0,6373	0,0264
DY	0,0157	0,0012	0,0215	-0,0071	-0,1005	0,0537	-0,1380	-0,6451
P/L	0,0167	-0,0185	-0,0373	0,0214	-0,1301	0,0369	-0,1136	0,5518
P/V	-0,0530	0,0271	-0,0877	0,0345	0,5695	-0,0460	-0,0081	0,0248
P/VC	-0,0014	0,4254	-0,0154	0,1095	0,0067	0,0218	0,0130	-0,0046
P/VCT	-0,0014	0,4254	-0,0154	0,1095	0,0067	0,0218	0,0130	-0,0046
P/CGL	0,0539	-0,0014	-0,0331	-0,0020	0,1083	0,0894	-0,5659	-0,0562

ROE	-0,0314	0,0966	0,0488	-0,3228	-0,0268	0,0125	-0,0294	-0,0219
ROA	-0,0687	-0,0116	0,4495	0,0011	-0,0869	0,0248	-0,0687	0,0033
ROC	-0,0320	0,0068	0,3615	0,0172	0,0341	0,0181	-0,0533	-0,0553
ML	0,0578	-0,0155	0,0708	-0,0176	0,5189	0,1075	-0,0048	-0,0331
MCL	0,0308	0,0146	-0,0117	0,0052	-0,0015	-0,0266	-0,0150	-0,4527
LC	-0,3023	-0,0019	0,0449	-0,0271	-0,0024	-0,0951	0,0158	0,0380
LS	-0,3165	0,0017	0,0427	-0,0326	0,0388	-0,1255	-0,0190	0,0338
LG	-0,0761	0,0347	0,0062	-0,0001	-0,0100	0,2975	-0,0222	0,0001
LI	-0,2845	-0,0063	0,0072	-0,0182	0,0040	-0,1478	-0,0153	0,0071
GE	-0,0175	0,1145	-0,0153	-0,3515	0,0079	0,0065	0,0085	-0,0138
PCTRT	-0,0192	-0,0334	0,3414	-0,0156	-0,0257	-0,1229	0,0731	0,0491
GCPCT	0,0592	0,0507	-0,0432	0,0424	0,0899	0,3636	-0,0876	-0,0021
CP	0,1700	-0,0253	0,0017	-0,0333	-0,0100	0,4487	0,0902	0,0750
LGM	-0,1386	0,0130	0,0563	-0,0166	-0,0650	0,1978	0,0241	-0,0216
GEM	-0,0251	-0,2447	-0,0345	-0,5296	-0,0075	-0,0171	-0,0479	0,0110

2002

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PM	-0,0440	-0,0127	-0,0640	0,0528	0,0262	-0,5566	-0,0116	-0,0815	0,0764
DY	-0,0322	0,0188	0,1361	0,2235	0,1493	-0,1328	-0,0044	0,3264	0,2318
P/L	0,0308	-0,0063	-0,0127	-0,0034	-0,0268	-0,5838	-0,0434	0,1771	-0,1540
P/V	0,0078	-0,0209	0,1421	-0,0116	0,5934	0,0243	0,0194	-0,0471	-0,0146
P/VC	-0,0022	-0,3226	0,0159	0,0018	0,0157	-0,0144	0,2299	0,0128	-0,0062
P/VCT	-0,0022	-0,3226	0,0159	0,0018	0,0157	-0,0144	0,2299	0,0128	-0,0062
P/CGL	0,0211	-0,0177	-0,0115	-0,2082	-0,0079	-0,1966	0,0726	-0,4326	0,2161
ROE	-0,0136	-0,2288	-0,0308	-0,0089	-0,0058	-0,0048	-0,1718	0,0003	0,0123
ROA	-0,0463	0,0146	-0,4297	-0,0355	-0,0431	-0,0689	-0,0297	0,0807	0,0098
ROC	-0,1218	-0,0217	-0,3463	0,0030	-0,0290	0,0188	0,0464	-0,1496	0,0558
ML	-0,0497	0,0060	-0,1489	0,0324	0,4932	-0,0233	-0,0379	0,0211	-0,0268
MCL	-0,0156	-0,0035	0,0157	-0,0015	0,0319	-0,0416	0,0183	0,0266	-0,9080
LC	-0,2855	-0,0033	-0,0603	0,0370	-0,0232	-0,0208	-0,0294	-0,0036	-0,0093
LS	-0,3067	-0,0004	-0,0695	0,0459	0,0339	-0,0161	-0,0053	-0,1170	-0,0228
LG	-0,0148	-0,0046	0,0100	-0,4218	0,0144	0,0231	-0,0346	0,0165	-0,0207
LI	-0,3230	-0,0024	-0,0821	0,1020	0,0514	0,0195	-0,0124	-0,1006	-0,0259
GE	-0,0092	-0,2007	0,0012	-0,0059	0,0041	-0,0053	-0,2815	-0,0007	-0,0035
PCTRT	-0,0010	0,0202	-0,3637	-0,0053	-0,0300	-0,0549	-0,0304	0,0554	-0,0464
GCPCT	0,0768	0,0042	-0,0272	-0,5360	-0,0121	0,0244	-0,0160	-0,1352	-0,0201
CP	0,0834	-0,0279	-0,0143	-0,1239	-0,0589	-0,0704	0,0400	0,5477	0,0536
LGM	-0,1810	-0,0151	-0,0435	-0,0420	-0,0434	-0,0046	-0,0029	0,2666	0,0170
GEM	-0,0093	0,0821	0,0060	-0,0195	0,0077	-0,0259	-0,7224	0,0117	0,0209

2003

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PM	0,0284	0,3556	-0,0915	0,1841	-0,0756	-0,2708	0,0610	0,0995	-0,0208
DY	0,0026	-0,0295	0,0558	0,0425	0,1816	-0,0385	0,2463	-0,0117	0,3702
P/L	0,0362	-0,0063	0,0248	0,0243	0,0643	0,0104	0,0831	-0,0063	-0,9173
P/V	0,0362	0,0015	0,0153	-0,0997	-0,6321	-0,0208	0,0540	0,1888	0,0068
P/VC	-0,0175	0,4165	0,0032	0,0067	0,0188	0,0769	-0,0115	-0,0183	0,0034
P/VCT	-0,0175	0,4165	0,0032	0,0067	0,0188	0,0769	-0,0115	-0,0183	0,0034
P/CGL	-0,0374	-0,0567	0,0387	-0,0186	0,0947	0,1383	-0,5294	-0,0043	0,0111
ROE	0,0678	-0,0124	-0,0140	-0,2059	-0,0570	-0,0537	0,0492	-0,4185	0,0024
ROA	0,0597	0,0207	-0,4848	0,0004	0,0109	-0,0348	0,0132	-0,1121	0,0026
ROC	-0,0011	-0,0197	0,1049	0,1653	0,1022	0,0270	-0,0217	-0,5956	-0,0083
ML	0,0299	0,0180	0,0127	0,0621	-0,5189	-0,0634	-0,0012	-0,1386	0,0268
MCL	0,0753	0,0511	-0,0447	0,0805	-0,0646	-0,1194	-0,7596	-0,0129	0,0167
LC	0,2355	-0,0015	-0,0139	-0,0285	0,0297	-0,0969	-0,0141	-0,0265	-0,0378



LS	0,2692	0,0271	-0,0474	-0,0433	-0,0496	-0,2118	-0,0348	0,0015	-0,0073
LG	0,1302	-0,0306	0,0549	-0,0272	-0,0423	0,2534	-0,0182	-0,0287	-0,0271
LI	0,2598	0,0154	-0,0480	-0,0555	-0,0518	-0,1976	-0,0284	-0,0068	0,0032
GE	-0,0144	-0,0262	0,0170	-0,4202	-0,0721	0,0376	-0,0169	-0,0227	0,0147
PCTRT	0,0302	0,0245	-0,5764	-0,0681	0,0185	0,0004	-0,0094	0,2056	0,0016
GCPCT	0,1433	-0,0448	-0,0854	0,0762	-0,0308	0,0549	0,0390	-0,0072	-0,0185
CP	-0,0800	0,0261	-0,0217	0,0244	0,0118	0,5822	-0,0235	0,0304	-0,0118
LGM	0,1464	-0,0054	-0,0153	-0,0381	0,0077	0,2514	-0,0014	-0,0508	-0,0248
GEM	0,0635	-0,0802	-0,0787	-0,5118	0,0274	-0,0205	0,0498	0,1645	-0,0052

2004

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0165	-0,0141	0,0385	0,0722	-0,0829	0,1130	0,2945	-0,4252
DY	-0,0532	0,0626	0,0072	-0,0702	-0,0207	-0,0730	0,8046	-0,0015
P/L	0,0185	-0,1485	-0,0375	0,0277	0,1025	0,1119	-0,0744	-0,6344
P/V	-0,0071	-0,0597	0,4993	0,0151	0,0153	0,0303	-0,0093	0,0076
P/VC	0,0294	-0,0470	-0,0147	-0,0216	0,0178	0,4299	-0,0442	0,0354
P/VCT	0,0294	-0,0470	-0,0147	-0,0216	0,0178	0,4299	-0,0442	0,0354
P/CGL	-0,0204	-0,0929	0,0169	0,1796	-0,1642	0,1843	0,0058	0,2688
ROE	-0,0481	0,3151	-0,0198	-0,0395	-0,0258	0,0382	0,0363	0,0365
ROA	-0,0423	0,3577	0,0191	0,0835	-0,0460	-0,0989	-0,0088	0,0014
ROC	-0,0600	0,3383	-0,0148	-0,0079	0,0485	-0,0308	0,0398	0,0368
ML	-0,0220	0,0522	0,5088	0,0258	-0,0146	-0,0686	0,0175	-0,0073
MCL	0,0237	0,1658	0,0268	0,0022	-0,1087	-0,2260	-0,0441	-0,5091
LC	0,2644	-0,0200	-0,0423	-0,0450	-0,0260	0,0186	-0,0083	-0,0420
LS	0,3430	-0,0739	-0,0013	-0,0688	-0,1230	0,0521	-0,0455	-0,0110
LG	0,0596	-0,0140	-0,0058	-0,0422	0,2833	-0,0102	0,0585	-0,0135
LI	0,3324	-0,0526	0,0109	-0,0675	-0,1197	0,0255	-0,1217	-0,0130
GE	0,0905	-0,0340	-0,0249	-0,4310	0,0425	0,0158	0,0624	0,0197
PCTRT	-0,0318	0,1655	0,0407	-0,1528	-0,0974	-0,1566	-0,2658	-0,0933
GCPCT	0,0961	-0,0413	0,0092	0,1646	0,0098	-0,0246	0,1496	0,0630
CP	-0,1819	-0,0118	0,0210	-0,0039	0,4675	0,0325	-0,0544	-0,0184
LGM	0,0717	0,0327	-0,0013	-0,0681	0,2850	-0,0234	-0,0575	-0,0415
GEM	0,0581	-0,0482	-0,0143	-0,4141	0,0564	0,0651	0,1168	0,0853

2005

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0276	0,0555	0,0563	0,1375	0,2301	-0,1588	0,1167	0,2239
DY	-0,0727	0,0461	-0,0371	0,0859	0,0813	0,0725	0,5019	0,0309
P/L	0,0004	0,0098	-0,0471	-0,0873	-0,0923	0,0245	-0,0664	-0,3040
P/V	0,0308	0,0201	0,5070	-0,0014	0,0087	-0,0311	0,0099	0,0117
P/VC	-0,0002	0,4750	0,0139	-0,0744	0,0103	0,0343	0,0047	-0,0509
P/VCT	-0,0002	0,4750	0,0139	-0,0744	0,0103	0,0343	0,0047	-0,0509
P/CGL	-0,0958	0,1301	0,0109	0,2240	0,3065	-0,1623	-0,2544	0,1404
ROE	0,0892	0,0162	-0,0124	0,0081	-0,2111	0,0040	-0,0121	0,4855
ROA	0,0531	0,0608	0,0150	-0,4696	0,0727	0,0012	0,0004	0,1362
ROC	-0,0079	-0,0871	-0,0416	-0,0146	0,0195	0,0550	-0,0562	0,5677
ML	0,0319	0,0086	0,5061	-0,0284	0,0243	-0,0329	0,0057	0,0393
MCL	0,0002	-0,0403	0,0450	-0,0658	-0,0485	-0,0685	0,7385	0,0363
LC	0,2889	-0,0028	-0,0022	-0,0407	-0,0367	-0,0621	-0,0030	0,0139
LS	0,3242	-0,0131	0,0228	-0,0532	-0,0268	-0,1333	-0,0371	0,0265
LG	0,0738	-0,0043	0,0192	0,0906	-0,0081	0,2694	-0,0373	0,0214
LI	0,3149	0,0062	0,0271	-0,0735	-0,0396	-0,1339	0,0089	0,0017
GE	0,0261	-0,0090	-0,0164	0,0687	-0,4166	0,0067	-0,0245	0,0475
PCTRT	0,0468	0,0667	0,0233	-0,5300	0,0117	-0,0324	0,0024	-0,2142
GCPCT	0,0151	-0,0447	0,0095	0,0403	0,1850	0,1731	-0,1730	0,1445

CP	-0,2141	0,0777	-0,0517	0,0545	-0,0062	0,4955	0,0439	-0,0127
LGM	0,1229	0,0122	0,0269	-0,0906	-0,0388	0,2760	-0,0103	0,0198
GEM	0,0097	-0,0166	0,0120	0,0541	-0,3683	0,0242	-0,0367	-0,0758

2006

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
PM	-0,0208	-0,0056	0,1051	-0,0451	0,0501	0,1107	-0,5352	-0,0483
DY	0,0070	-0,0010	0,0248	0,0453	0,0399	-0,0098	-0,0416	-0,5561
P/L	0,1323	0,0477	0,1575	-0,1473	0,1639	0,1196	0,1616	0,4894
P/V	-0,0166	-0,0963	-0,0266	0,0415	0,2129	-0,4599	0,0217	0,0394
P/VC	0,0057	-0,0192	0,4479	0,0194	0,0264	0,0480	-0,0331	-0,0222
P/VCT	-0,0482	-0,0430	0,4710	0,0263	0,1694	0,1254	-0,0281	0,0260
P/CGL	0,0478	0,0013	0,0752	-0,2025	0,0464	0,0420	0,2098	-0,5726
ROE	0,0492	-0,0043	0,0605	0,0190	-0,4160	-0,0788	-0,0119	-0,0621
ROA	-0,0263	-0,3394	0,0219	0,0379	-0,0506	0,0783	0,0012	-0,0086
ROC	0,0078	-0,0265	-0,1823	0,0445	-0,5306	0,2200	0,0190	0,0653
ML	0,0333	-0,3037	0,0250	-0,0059	0,0168	-0,0495	0,0045	-0,0368
MCL	-0,0063	0,0060	-0,0664	0,0440	-0,0487	-0,0931	-0,7481	0,0848
LC	0,2830	-0,0271	-0,0152	-0,0283	-0,0362	-0,0237	-0,0184	-0,0160
LS	0,3081	-0,0455	-0,0027	-0,0953	-0,0254	-0,0120	0,0098	-0,0047
LG	0,0811	0,0409	-0,0041	0,2602	0,0483	-0,1651	0,0493	-0,0260
LI	0,3070	0,0865	-0,0137	-0,1000	-0,0533	0,0176	0,0169	0,0303
GE	0,0302	0,0216	0,1248	-0,0197	-0,2065	-0,2736	0,0026	-0,0235
PCTRT	-0,0311	-0,3313	0,0276	0,0299	-0,0163	0,0599	0,0060	0,0003
GCPCT	0,0165	-0,0421	-0,0433	0,2107	0,0394	0,0326	-0,0789	-0,0937
CP	-0,2031	-0,0196	0,1015	0,4185	-0,0579	0,1291	0,0881	0,0228
LGM	0,0524	-0,0222	-0,0061	0,3174	-0,0610	0,0007	0,0232	0,0466
GEM	0,0413	0,0608	-0,0748	-0,0348	0,0183	-0,6355	0,0053	-0,0382

2007

Fator	1	2	3	4	5	6	7
PM	-0,0562	-0,0238	0,0187	0,0208	-0,0071	0,3196	-0,4514
DY	-0,0195	-0,0116	0,0489	0,0648	0,0446	0,0178	-0,6520
P/L	0,0050	0,0071	0,0919	0,0664	0,1056	0,3483	0,4662
P/V	-0,0066	-0,2514	0,0293	0,0171	0,0137	-0,0067	-0,0107
P/VC	0,0123	-0,0093	0,3908	0,0098	0,0861	0,0493	-0,0154
P/VCT	0,0167	-0,0070	0,3879	0,0108	0,0844	0,0677	-0,0129
P/CGL	-0,0296	0,0017	0,0073	-0,0358	0,0144	0,5733	0,0099
ROE	0,0556	0,0076	-0,0722	0,0092	-0,5552	0,0916	-0,0273
ROA	-0,0372	-0,2627	0,0010	0,0436	-0,0077	0,0147	-0,0206
ROC	-0,0835	-0,0136	-0,1759	0,0983	-0,3182	0,1814	0,1434
ML	-0,0006	-0,2511	0,0147	0,0124	0,0003	0,0098	-0,0154
MCL	-0,0238	0,0044	0,0688	-0,0224	0,1487	-0,3064	0,0441
LC	0,3038	-0,0119	0,0041	-0,0901	-0,0227	0,0045	0,0526
LS	0,3076	-0,0298	0,0025	-0,1096	-0,0261	-0,0015	0,0084
LG	0,0660	0,0144	0,0033	0,2747	-0,0375	-0,0116	-0,0053
LI	0,3182	0,0915	0,0128	-0,1231	-0,0079	-0,0243	0,0055
GE	0,0526	0,0062	0,0984	-0,0297	-0,4135	-0,0458	-0,0178
PCTRT	-0,0517	-0,2466	0,0008	0,0441	0,0079	-0,0051	-0,0066
GCPCT	0,0263	-0,0231	-0,0869	0,2431	-0,0426	0,2062	-0,0043
CP	-0,2410	-0,0399	0,0522	0,4881	0,0180	-0,0818	-0,0651
LGM	0,0390	-0,0195	-0,0042	0,3053	-0,0392	-0,0653	-0,0037
GEM	-0,0289	-0,0180	0,2505	-0,0153	0,0481	-0,2844	-0,0470

2008

Fator	1	2	3	4	5	6	7	8
-------	---	---	---	---	---	---	---	---

PM	-0,0710	0,0044	-0,0191	0,0017	0,1092	0,0229	-0,0753	-0,2955
DY	0,0671	0,0414	0,0305	0,0222	-0,0475	0,0202	0,2622	-0,6145
P/L	-0,0218	0,0931	0,0470	0,0832	-0,0040	0,2587	-0,3568	0,1369
P/V	-0,0157	-0,0059	0,0529	-0,5033	-0,0052	0,0060	0,0379	0,0075
P/VC	-0,0388	0,0397	-0,0175	-0,0053	0,0041	0,4517	0,0567	-0,0509
P/VCT	-0,0107	-0,3958	-0,0009	0,0054	-0,0441	-0,0928	-0,0924	-0,0327
P/CGL	0,0203	-0,0350	0,0150	0,0169	-0,0281	-0,0567	-0,7633	-0,0986
ROE	-0,0051	0,0509	-0,0234	-0,0326	-0,0077	0,4486	0,1181	-0,0785
ROA	-0,0281	-0,0038	-0,4989	-0,0225	-0,0125	0,0147	-0,0187	-0,0169
ROC	0,1346	0,0362	0,0056	-0,0911	-0,1210	0,0867	-0,0438	0,0254
ML	-0,0247	-0,0100	0,0098	-0,5023	0,0096	-0,0170	0,0353	-0,0098
MCL	-0,0337	0,0388	0,0126	0,0253	0,0419	0,0008	0,1434	0,6402
LC	-0,2984	0,0032	-0,0225	-0,0090	0,0730	0,0360	0,0041	0,0538
LS	-0,3102	-0,0046	-0,0368	-0,0265	0,0770	0,0394	-0,0158	-0,0053
LG	-0,0755	-0,0299	0,0511	-0,0648	-0,2646	-0,0036	0,0036	0,0412
LI	-0,2878	-0,0053	-0,0324	-0,0236	0,0529	0,0378	0,0176	-0,0084
GE	-0,0320	-0,2930	-0,0125	-0,0171	0,0118	0,0775	0,0732	0,0213
PCTRT	-0,0416	-0,0089	-0,5194	0,0750	0,0135	0,0031	0,0572	0,0197
GCPCT	-0,0277	-0,0121	-0,0543	-0,0308	-0,2635	-0,0524	-0,2324	-0,1234
CP	0,2298	-0,0172	0,0425	0,1091	-0,4392	0,0200	0,0596	0,0486
LGM	-0,0464	-0,0294	-0,0503	-0,0461	-0,3181	0,0321	0,0533	0,0156
GEM	-0,0034	-0,4249	-0,0106	-0,0138	-0,0481	-0,1340	-0,0286	0,0018

2009

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Factor5	Factor6	Factor7	Factor8
PM	-0,0004	-0,0054	-0,0107	0,0716	0,5458	-0,0288	-0,0809	-0,1369
DY	-0,0007	-0,0051	0,0015	0,0144	0,1543	0,1402	0,4781	0,2048
P/L	0,0053	-0,0207	0,0099	0,0532	0,0954	0,1308	-0,8108	0,1184
P/V	0,0234	-0,0027	-0,2283	0,1072	0,0537	-0,0055	0,0360	0,0574
P/VC	-0,0029	-0,1701	0,0047	-0,0067	0,0009	0,3472	-0,0256	-0,0440
P/VCT	-0,0002	-0,2272	-0,0016	0,0129	0,0240	0,0584	-0,0438	-0,0056
P/CGL	0,0071	0,0068	-0,0013	0,0312	0,5633	-0,0211	0,0496	0,0311
ROE	0,0096	0,2293	0,0083	-0,0167	0,0027	0,2719	-0,0154	-0,0121
ROA	0,0062	0,0045	0,2819	0,0124	0,0161	-0,0074	0,0060	0,0212
ROC	-0,0202	0,0249	-0,0106	-0,0240	-0,0284	0,6995	-0,0538	-0,0196
ML	0,0098	0,0047	0,2798	0,0107	0,0069	-0,0114	0,0076	0,0199
MCL	-0,0235	-0,0041	-0,0003	-0,0051	0,0757	0,0200	0,0126	-0,9412
LC	-0,2842	-0,0050	0,0037	-0,0914	0,0010	-0,0038	-0,0132	-0,0110
LS	-0,2964	-0,0072	0,0024	-0,1260	0,0109	0,0167	-0,0120	-0,0134
LG	-0,0500	-0,0050	-0,0280	0,3565	0,0311	-0,0335	-0,0025	0,0192
LI	-0,2941	-0,0063	0,0071	-0,1330	-0,0189	0,0177	0,0197	-0,0220
GE	-0,0112	-0,2299	-0,0040	-0,0072	-0,0190	-0,0088	0,0022	0,0033
PCTRT	-0,0044	-0,0031	-0,2794	-0,0146	-0,0183	0,0108	-0,0041	-0,0205
GCPCT	0,0565	-0,0093	-0,0367	0,4347	0,1798	-0,0963	-0,1246	0,0694
CP	0,1713	-0,0043	0,0254	0,3871	-0,1586	0,1023	0,0816	-0,0860
LGM	-0,1272	-0,0027	-0,0125	0,2023	-0,0402	0,0502	0,0355	-0,0339
GEM	-0,0056	-0,2371	-0,0059	0,0100	-0,0045	-0,0567	0,0035	0,0088

#### QUADROS A4.5 – RENTABILIDADES DA CARTEIRA DE MAIOR ESCORE

Período de investimento de um ano

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe	Alfa de Jensen da
-----	---------------------	------------------	------------------------	---------------	-------------------

				Ibovespa	carteira
1999	72,90%	-21,05%	0,0978	-0,0703	72,00%
2000	1,59%	-8,56%	-0,0575	-0,0498	-7,04%
2001	19,69%	-16,19%	- 0,0071	-0,0733	4,91%
2002	75,21%	67,51%	0,2543	0,1234	50,38%
2003	65,27%	18,38%	0,1152	0,0060	49,26%
2004	15,87%	35,50%	-0,0035	0,0498	-6,42%
2005	48,42%	18,81%	0,1021	0,0169	33,19%
2006	27,53%	28,60%	0,0469	0,0400	11,59%
2007	4,43%	-39,86%	-0,0077	-0,0627	19,54%
2008	77,44%	55,50%	0,1995	0,1182	50,76%
2009	13,48%	-2,57%	0,0157	-0,0394	9,33%
<b>Média</b>	38,35%	12,37%	0,0687	0,0053	26,14%

#### Período de investimento de dois anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
1999	94,59%	-29,60%	0,0590	-0,0601	81,51%
2000	-0,92%	-24,75%	-0,0816	-0,0617	-22,05%
2001	58,92%	51,32%	0,0337	0,0149	19,62%
2002	113,53%	85,89%	0,1751	0,0669	72,67%
2003	98,09%	53,88%	0,0844	0,0276	57,81%
2004	74,28%	54,31%	0,0673	0,0330	38,52%
2005	79,55%	47,41%	0,0819	0,0292	44,90%
2006	-8,57%	-11,26%	-0,0444	-0,0254	-23,64%
2007	67,21%	14,34%	0,0245	-0,0049	50,91%
2008	71,39%	51,63%	0,0806	0,0476	39,26%
<b>Média</b>	64,81%	29,32%	0,0480	0,0067	35,95%

#### Período de investimento de três anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
1999	109,53%	-45,79%	0,0372	-0,0646	81,16%
2000	57,99%	42,76%	0,0054	-0,0076	7,38%
2001	92,97%	69,70%	0,0384	0,0123	37,45%
2002	127,08%	121,39%	0,1112	0,0615	66,75%
2003	155,64%	72,69%	0,0870	0,0240	101,28%
2004	89,45%	82,91%	0,0433	0,0355	37,55%
2005	32,02%	7,54%	-0,0024	-0,0154	11,56%
2006	37,61%	42,94%	0,0068	0,0067	3,68%
2007	47,63%	15,77%	0,0068	-0,0112	28,11%
<b>Média</b>	83,32%	45,10%	0,0371	0,0046	41,66%

#### Período de investimento de cinco anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
1999	195,83%	40,10%	0,0496	-0,0187	124,57%
2000	93,87%	96,64%	0,0059	0,0045	4,08%
2001	143,77%	124,01%	0,0370	0,0199	55,48%
2002	196,43%	168,79%	0,0819	0,0480	105,90%
2003	168,02%	61,43%	0,0277	-0,0023	105,24%

2004	106,06%	97,25%	0,0249	0,0145	36,47%
2005	112,64%	59,18%	0,0332	0,0024	57,75%
<b>Média</b>	145,23%	92,49%	0,0372	0,0098	55,48%

## APÊNDICE 5 – RESULTADOS DA ANÁLISE DISCRIMINANTE E REGRESSÃO LOGÍSTICA

QUADRO A5.1 – FUNÇÃO DISCRIMINANTE LINEAR DE FISHER COM TODAS AS VARIÁVEIS

Var.	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
PM	1,03006	1,04828	0,24847	-0,25408	0,47505	0,55771	0,09551	0,76537	0,46726	0,08301	0,12077
DY	0,16904	0,36353	0,18009	0,40011	0,20041	0,82301	0,03152	0,22268	0,37372	-0,23660	0,27979
P/L	-0,46575	-0,10411	0,04577	0,03564	0,35133	0,22360	-0,06804	0,02279	-0,03758	-0,01373	0,00431
P/V	-0,30369	-0,00205	-0,27281	-0,22155	0,09200	-0,01453	-0,00282	0,03333	-0,60159	-0,25392	-0,15194
P/VC	0,57040	-0,31844	-0,01809	1,05567	0,46003	0,23542	0,48839	-0,98642	-0,44518	0,42094	-0,15217
P/VCT	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,32725	0,74854	-0,07253	0,15156
P/CGL	-0,48404	0,33091	0,53397	-0,06139	-0,03165	0,17573	0,41061	0,28698	-0,08887	-0,07245	-0,20548
ROE	-1,16366	-0,21556	-0,06349	1,38641	-0,03454	-0,05583	-0,30064	-0,36964	0,29506	-0,02167	-0,01346
ROA	1,65312	0,16165	0,37260	-0,31669	0,70822	0,14416	0,12647	2,33762	0,66851	-0,26492	2,69859
ROC	-0,47503	-0,04491	-0,19299	-0,16272	-0,15503	-0,06246	-0,04655	-0,22391	0,29606	-0,06769	0,27497
ML	0,05888	-0,05030	0,04600	0,05258	-0,14135	0,05146	0,00166	-0,52478	0,22478	0,25549	-1,30792
MCL	-0,43746	-0,15045	-0,05445	-0,09134	-0,06671	-0,12102	0,00422	0,35237	-0,10409	-0,09111	-0,05434
LC	0,08250	0,82623	0,38829	1,84884	0,60811	-0,44050	0,30956	1,27276	-1,59033	0,50563	-0,37853
LS	-0,03584	-0,13712	-0,00403	-1,76474	-0,45937	-0,57653	0,45929	-0,36757	1,51597	-0,48528	0,73845
LG	-0,46092	-0,22659	-1,40662	-0,49418	-0,52321	-0,64111	-0,18252	-0,59168	-0,49090	-0,05821	-0,11847
LI	0,98774	-0,24736	0,28665	0,82351	0,27494	1,00635	-0,57273	-0,27932	0,11737	0,32459	-0,51477
GE	3,57084	0,09297	-0,00774	-2,87445	0,28815	0,15538	-0,11734	0,69748	-0,60591	-0,33845	0,08579
PCTRT	-1,82221	-0,20819	-0,39695	-0,12699	-0,57846	-0,22007	-0,04371	-2,27195	-0,57432	0,21241	1,38452
GCPCT	0,02543	0,31280	0,53833	0,35857	0,02313	0,41341	-0,07037	0,35763	0,19773	-0,18001	0,02913
CP	0,08647	-0,05430	-0,07062	0,44223	-0,26298	-0,05773	-2,49796	0,02232	-0,01244	-0,06415	-0,09689
LGM	-1,26258	-0,51262	0,50301	-1,51399	0,11651	0,55128	0,25670	-0,32590	0,34218	0,03298	0,21854
GEM	-2,73207	-0,09086	0,04197	1,05312	-0,26512	-0,01357	0,06625	0,51802	0,06317	0,44641	-0,19028
Const.	-2,80720	-2,50572	-2,23486	-3,20747	-2,01467	-2,80246	1,22688	-2,50920	-2,07645	-1,56322	-1,29705

QUADROS A5.2 – MATRIZ CONFUSÃO DA FUNÇÃO DISCRIMINANTE LINEAR DE FISHER PELA ABORDAGEM LACHENBRUCH – TODAS AS VARIÁVEIS

1999

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	53,84615	14	12
Fracasso	98,94736	1	94
Total	89,25620	15	106

2000

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	21,42857	6	22
Fracasso	97,76119	3	131
Total	84,56790	9	153

2001

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	12,50000	4	28
Fracasso	96,91358	5	157
Total	82,98969	9	185

2002

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	7,14286	1	13
Fracasso	98,80240	2	165
Total	91,71271	3	178

2003

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	17,14286	6	29
Fracasso	96,94656	4	127
Total	80,12048	10	156

2004

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	17,39130	4	19
Fracasso	97,66082	4	167
Total	88,14433	8	186

2005

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	18,75000	9,00000	39,0000
Fracasso	97,43590	4,00000	152,0000
Total	78,92157	13,00000	191,0000

2006

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	20,68966	6	23
Fracasso	98,61111	2	142
Total	85,54913	8	165

2007

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	25,71428	9	26
Fracasso	97,10145	4	134
Total	82,65896	13	160

2008

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	11,32076	6	47
Fracasso	95,48387	7	148
Total	74,03846	13	195

2009

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	17,74194	11	51
Fracasso	94,96403	7	132
Total	71,14428	18	183

QUADRO A5.3 – FUNÇÃO DISCRIMINANTE LINEAR DE FISHER VIA MÉTODO *FORWARD STEPWISE*

Var.	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
PM	1,04268	1,01312	0,28343		0,43315	0,63070		0,71522	0,42137		
DY		0,33117	0,22571	0,45135	0,20949	0,75896		0,24936	0,49999	-0,20753	0,23100
P/L	-0,45876				0,34777						
P/V	-0,29074		-0,26941								
P/VC	0,57041	-0,27460			0,51219			-0,42629		0,35390	-0,15390
P/VCT							-0,61628				
P/CGL	-0,49887	0,34026	0,57570				-0,48855	0,25094			
ROE	-1,19363										
ROA	1,65243				0,46761						
ROC	-0,47104								0,34887		0,23215
ML				-0,29578							
MCL	-0,43186						-0,00516	0,37962			
LC			0,47602			-0,68534	-0,29066			0,39745	
LS											
LG			-1,29594								
LI	1,00758		0,31627			0,86730					
GE	3,61937								-0,19988	-0,32935	
PCTRT	-1,75819				-0,36283						
GCPCT		0,30435	0,53666							-0,23726	
CP		-0,33529			-0,40270		-10,4023	-0,29084			
LGM	-1,50278		0,46052	-0,52350							
GEM	-2,72279							0,46597		0,38976	
Const.	-2,78303	-2,41508	-2,20111	-2,77160	-1,95203	-2,66818	4,65054	-2,30647	-1,85884	-1,51778	-1,24310

QUADROS A5.4 – MATRIZ CONFUSÃO DA FUNÇÃO DISCRIMINANTE LINEAR DE FISHER PELA ABORDAGEM LACHENBRUCH – *FORWARD STEPWISE*

1999

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	50,00000	13	13
Fracasso	98,94736	1	94
Total	88,42975	14	107



2000

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	17,85714	5	23
Fracasso	97,76119	3	131
Total	83,95061	8	154

2001

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	12,50000	4	28
Fracasso	97,53086	4	158
Total	83,50516	8	186

2002

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	0,00000	0	14
Fracasso	99,40120	1	166
Total	91,71271	1	180

2003

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	20,00000	7	28
Fracasso	97,70992	3	128
Total	81,32530	10	156

2004

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	8,69565	2	21
Fracasso	98,24561	3	168
Total	87,62887	5	189

2005

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	16,66667	8	40
Fracasso	98,07692	3	153
Total	78,92157	11	193

2006

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	17,24138	5	24
Fracasso	99,30556	1	143
Total	85,54913	6	167

2007

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	14,28571	5	30
Fracasso	96,37681	5	133
Total	79,76878	10	163

2008

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	5,66038	3	50
Fracasso	95,48387	7	148
Total	72,59615	10	198

2009

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	8,06452	5	57
Fracasso	94,96403	7	132
Total	68,15920	12	189

#### QUADROS A5.5 – CARTEIRAS FORMADAS PELA FUNÇÃO DISCRIMINANTE LINEAR DE FISHER

Com todas as variáveis

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
BRKM5	TNLP4	APT14	BOBR4	CNFB4	JFEN3	RCSL4	TRPL4	PTBL3	GETI4
CPL6	TLPP4	ETER3	AMBV4	LAME4	FJTA4	IMBI4	AMBV4	ODPV3	PMET6
ITSA3	AMBV4	COCE5	SLED4	GGBR4	POMO4	MWET4	PETR4	GOLL4	TOYB3
VALE5	VALE5	BSUL5	LATS3	PETR4	ALPA4	JFEN3	CBMA4	VALE5	PTBL3
ELET3	EKTR4	TRPL4	CRUZ3	PMAM3	MAGS5	MGEL4	IMBI4	CAFE4	CARD3
TLPP4	ICPI3	UGPA4	ARCZ6	NETC4	CNFB4	EMAE4	PMAM3	TENE5	BMKS3
PETR4	ELET3	TMAR5		GETI4	SAPR4	SZPQ4	BRAP4	STRP4	UNIP6
LUXM4	PETR4	TLPP4		ARCZ6	CTNM4	BRFS3	ARCZ6	BIOM4	GPIV11
BUET4		VALE5		EMBR3	DURA4	SUZB5	CSNA3	RPMG3	RDCD3
TPEC6B		PETR4		TLPP4	PTIP4	BRAP4	USIM5	SOND6	
POPR4				VALE5	TRPL4	GOAU4	VALE5	EALT4	
VAGV4					SDIA4	BRTO4		SGAS4	
ENMA3B					FFTL4	TNLP4		AFLU3	
SBSP3					LAME4	TMAR5		PEAB3	
CHAP3					UGPA4	CSNA3		CELP5	
					SUZB5	USIM5		LIGT3	
					SBSP3	GGBR4		EKTR4	
					GETI4	VALE5		TRPL4	
					KLBN4	PETR4		GETI4	
					BRAP4	HAGA4		ELPL4	
					GOAU4	CORR4		ALLL3	
					CPSL3	CBMA4		ARCZ6	
					CCRO3	GAZO4		CPFE3	
					ARCE3	VPSC4		TLPP4	

					CRUZ3	WISA4		AMBV4	
					EMBR3	HOOT4		PETR4	
					ITSA3	HETA4			
					CSNA3	LUXM4			
					AMBV4	TOYB3			
					BAUH4	HBTS5			
					RCSL4	FBMC4			
					VPTA4	GRNL4			
					TXRX4	EALT4			
					FBMC4	SGEN4			
					RNPT3	MNDL4			
					GRNL4	HGTX3			
					PTNT4	EUCA4			
					CCTU4	VINE5			
					DUQE4	MEND6			
					DROG3	TUPY3			
					LECO4	BOBR4			
					CEBR6	LFEE4			
					CTKA4	PLTO6			
					CGRA4	MOAR3			
					BDLL4	FLCL5			
					RANI3	EEEL3			
					PNVL3	SCAR3			
					MTSA4	ELEK4			
					TNCP3	REDE4			
					IGUA3	CSRN6			
					RPMG3	CELP5			
					PTPA4	CMGR4			
					PATI3	SAPR4			
					BRGE12	AVIL3			
					MRSL4	CEGR3			
					FBRA4	UNIP6			
					CELP5	CLSC6			
					ASTA4	CTNM4			
					TIBR5	CEPE5			
					ROMI3	AELP3			
					ESCE3	RGEG3			
					ENER6	LIGT3			
					FRAS4	ENMA3B			
					ILMD4	GEP4			
					EBEN4	GFSA3			
					MOAR3	CSMG3			
					CLSC6	CBEE3			
					CEPE5	UGPA4			
					CPFP4	DASA3			
					DPPI4	CGAS5			
					CEGR3	CEEB3			
					GEP4	SDIA4			
					AVIL3	KLBN4			
					PQUN4	NETC4			
					CRTP5	SBSP3			
					LEVE4	BRKM5			
					CPFG3	GETI4			
					TMCP4	ALLL3			
					UNIP6	LAME4			

					CEEB3	BRTP3			
					BRFS3	CCRO3			
					TCSL4	ARCZ6			
					PALF3	GOLL4			
					BRTO4	TBLE3			
					TBLE3	CPFE3			
					ARCZ6	CMIG4			
					CMIG4	ELET3			
					GGBR4	AMBV4			
					TMAR5				
					TLPP4				
					PETR4				

*Método forward stepwise*

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
BRKM5	TNLP4	APT4	CEBR6	CNFB4	JFEN3	RCSL4	AMBV4	VALE5	GET4
CPLE6	TLPP4	DXTG4		LAME4	FJTA4	IMBI4	PETR4	STRP4	TOYB3
ITSA3	AMBV4	ETER3		AMBV4	POMO4	MWET4	IMBI4	ARLA3	PTBL3
VALE5	VALE5	COCE5		PETR4	ALPA4	JFEN3	BRAP4	EALT4	CARD3
ELET3	PVPR4	BSUL5		NETC4	MAGS5	MGEL4	CSNA3	CELP5	BMKS3
TLPP4	EKTR4	TRPL4		GET4	COCE5	EMAE4	USIM5	LIGT3	GPIV11
PETR4	SAPR4	UGPA4		CRUZ3	CNFB4	SZPQ4	VALE5	WHRL4	RDCD3
LUXM4	ELET3	TMAR5		ARCZ6	SAPR4	SUZB5		EKTR4	
BUET4	PETR4	TLPP4		CSNA3	RAPT4	BRAP4		TRPL4	
TPEC6B		AMBV4		EMBR3	CTNM4	GOAU4		PETR4	
POPR4		VALE5		TLPP4	DURA4	TNLP4			
VAGV4		PETR4		VALE5	PTIP4	TMAR5			
ENMA3B					TRPL4	CSNA3			
SBSP3					SDIA4	USIM5			
CHAP3					FFTL4	GGBR4			
					LAME4	VALE5			
					UGPA4	HAGA4			
					SUZB5	CORR4			
					SBSP3	CBMA4			
					GET4	GAZO4			
					KLBN4	VPSC4			
					BRAP4	WISA4			
					GOAU4	HOOT4			
					CPSL3	HETA4			
					CCRO3	LUXM4			
					BRTP3	TOYB3			
					ARCE3	HBTS5			
					CRUZ3	FBMC4			
					USIM5	GRNL4			
					EMBR3	EALT4			
					ITSA3	MNDL4			
					CSNA3	HGTX3			
					AMBV4	EUCA4			
					RCSL4	VINE5			
					HBTS5	MEND6			
					RSUL4	TUPY3			
					FBMC4	BOBR4			
					RNPT3	LFTE4			
					GRNL4	PLTO6			
					PTNT4	MOAR3			

					CCTU4	FLCL5			
					DUQE4	EEEL3			
					DROG3	SCAR3			
					RSIP4	ELEK4			
					LECO4	REDE4			
					CTKA4	CSRN6			
					CGRA4	CELP5			
					BDLL4	CMGR4			
					RANI3	SAPR4			
					PNVL3	CEGR3			
					MTSA4	UNIP6			
					TNCP3	CLSC6			
					IGUA3	CEPE5			
					RPAD6	AELP3			
					RPMG3	RGEG3			
					PTPA4	LIGT3			
					PATI3	ENMA3B			
					BRGE12	GEPA4			
					MRSL4	GFSA3			
					FBRA4	CSMG3			
					CELP5	CBEE3			
					SLED4	UGPA4			
					ASTA4	DASA3			
					TIBR5	CEEB3			
					ROMI3	SDIA4			
					MLFT4	KLBN4			
					FRAS4	NETC4			
					ILMD4	SBSP3			
					MOAR3	GETI4			
					PEFX3	ALLL3			
					CLSC6	LAME4			
					CEPE5				
					DPPI4				
					CEGR3				
					GEPA4				
					AVIL3				
					PQUN4				
					LEVE4				
					TMCP4				
					UNIP6				
					CEEB3				
					BRFS3				
					TCSL4				
					PTQS4				
					TCOC3				
					BRTO4				
					TBLE3				
					ARCZ6				
					BRKM5				
					CMIG4				
					GGBR4				
					TMAR5				
					TLPP4				
					PETR4				

12 primeiras do método *forward stepwise*

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
BRKM5	PETR4	APT14	CEBR6	CNFB4	BDLL4	HETA4	PETR4	PETR4	RDCD3
ITSA3	TLPP4	DXTG4	GEPA4	LAME4	ILMD4	CBMA4	VALE5	CELP5	BMKS3
VALE5	VALE5	ETER3	COCE5	AMBV4	TLPP4	WISA4	USIM5	VALE5	GPIV11
ELET3	ELET3	COCE5	CEPE5	PETR4	CGRA4	VPSC4	IMBI4	EALT4	CARD3
TLPP4	AMBV4	BSUL5	FBMC4	NETC4	PETR4	TOYB3	AMBV4	EKTR4	TOYB3
PETR4	EKTR4	TRPL4	GOAU4	GETI4	CCTU4	SUZB5	CSNA3	WHRL4	GETI4
LUXM4	PVPR4	UGPA4	SALM4	CRUZ3	PTNT4	LUXM4	BRAP4	LIGT3	PTBL3
TPEC6B	TNLP4	TMAR5	SAPR4	ARCZ6	CEEB3	MNDL4	ITSA3	ARLA3	LPSB3
VAGV4	SAPR4	TLPP4	CEEB3	CSNA3	CPSL3	MWET4	HOOT4	STRP4	UNIP6
ENMA3B	EBTP4	AMBV4	LUXM4	EMBR3	TNCP3	SAPR4	GGBR4	TRPL4	DASA3
SBSP3	BRTO4	VALE5	CEGR3	TLPP4	CEPE5	ALLL3	ARCZ6	TLPP4	ALLL3
CHAP3	CPLE6	PETR4	PQUN4	VALE5	DPPI4	BOBR4	CCRO3	GETI4	VULC3
BRKM5	PETR4	APT14	CEBR6	CNFB4	BDLL4	HETA4	PETR4	PETR4	RDCD3
ITSA3	TLPP4	DXTG4	GEPA4	LAME4	ILMD4	CBMA4	VALE5	CELP5	BMKS3
VALE5	VALE5	ETER3	COCE5	AMBV4	TLPP4	WISA4	USIM5	VALE5	GPIV11

QUADRO A5.6 – MODELO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA MÚLTIPLA COM TODAS AS VARIÁVEIS

Var.	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Const.	-9,8197	-4,5741	-2,35653	-16,7584	-3,9182	-9,3370	-0,6606	-5,1001	-36,279	-1,4160	-41,024
PM	4,7222	3,7151	0,13611	-0,4073	0,6294	0,3514	0,06269	9,0455	0,461	0,11224	0,150
DY	-0,2325	0,3137	0,1446	0,4758	0,0866	0,7357	0,0376	0,0228	0,2530	-0,6128	0,4170
P/L	-2,2041	-0,2145	0,0658	0,1402	0,3776	0,1412	-1,5193	-6,3895	0,0830	-0,0183	-0,0460
P/V	-2,2743	-32,6378	-0,3595	-2,9749	-1,7057	-2,8901	0,0884	-2,0111	-16,7340	-1,9070	-1,2520
P/VC	0,3773	0,0757	0,8618	3,3159	0,5104	0,3844	0,3073	6,4876	2,2560	3,3929	-0,4580
P/VCT	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-32,371	-1,1070	-0,9238	0,2670
P/CGL	-1,0205	-0,0082	0,4953	0,0068	-0,3785	0,2276	0,3145	0,2775	-0,0220	-0,6240	-0,4250
ROE	-1,3778	-0,8699	-2,0536	6,0976	-1,2920	0,5462	-0,3354	-3,9535	-0,1460	0,4735	1,8960
ROA	7,2386	0,4727	0,5284	12,6919	5,0339	-21,084	0,5007	11,4572	3,3370	-1,3583	-5,0340
ROC	-7,7170	-0,4081	0,0131	-24,0498	-2,3097	0,0758	-0,2084	0,6541	0,2410	-0,1669	-0,4560
ML	-34,7987	0,9484	-0,1696	-13,4682	-1,4960	-0,1532	-4,9868	8,8428	-413,786	1,4793	295,6640
MCL	-0,2015	-0,3593	-0,1186	-0,1621	-0,0692	-0,3131	0,0028	-0,2227	-0,0840	-0,7948	-35,7800
LC	-0,2327	0,9867	0,9229	3,2116	1,0027	-0,5052	0,2697	1,1067	-3,8510	0,3666	-0,9020
LS	-2,0287	-0,6429	-0,2102	-2,3233	-0,9868	-0,5728	0,5149	-0,1838	4,4580	-0,5602	0,9640
LG	1,0171	-0,0756	-2,4333	-4,8228	-1,7270	-0,6777	-0,2977	-0,3035	-1,0400	0,0596	-0,3090
LI	2,4020	-0,2027	0,1184	0,9324	0,3546	0,9371	-0,5548	-0,6075	-0,6320	0,5465	-0,6760
GE	5,2452	0,3998	-1,1863	-11,4130	1,0895	0,0691	-0,0772	1,4090	0,8570	-2,4202	0,5190
PCTRT	-6,0786	-1,4534	-0,9882	-14,8745	-19,0759	-26,994	-0,1313	-23,345	-2,0080	1,1530	-192,711
GCPCT	-1,4025	0,2493	0,2036	-23,5610	-0,2833	-0,1144	-0,3597	0,1077	0,2720	-0,3244	-2,6110
CP	-1,3107	-0,3278	0,0421	0,4965	-0,6575	-0,4021	-2,8310	0,0416	0,0750	-0,1344	-0,4740
LGM	-2,1826	-0,3249	0,8982	-0,8007	1,0360	1,2617	0,4924	-0,3187	0,7410	0,0172	1,1610
GEM	-3,8389	-0,4400	0,8556	0,3449	-0,3576	-0,0860	0,0596	0,7483	-7,3850	2,0794	-0,4380

QUADROS A5.7 – MATRIZ CONFUSÃO DA MODELO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA MÚLTIPLA COM TODAS AS VARIÁVEIS PELA ABORDAGEM LACHENBRUCH

1999

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
-------	--------------------	--------------------	---------------------

Sucesso	65,38%	17	9
Fracasso	95,79%	4	91
Total	89,26%	21	100

2000

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	32,14%	9	19
Fracasso	98,51%	2	132
Total	87,04%	11	151

2001

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	6,25%	2	30
Fracasso	98,15%	3	159
Total	82,99%	5	189

2002

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	21,43%	3	11
Fracasso	98,80%	2	165
Total	92,82%	5	176

2003

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	25,71%	9	26
Fracasso	97,71%	3	128
Total	82,53%	12	154

2004

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	26,09%	6	17
Fracasso	98,25%	3	168
Total	89,69%	9	185

2005

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	22,92%	11	37
Fracasso	98,08%	3	153
Total	80,39%	14	190

2006

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso

Sucesso	37,93%	11	18
Fracasso	96,53%	5	139
Total	86,71%	16	157

2007

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	28,57%	10	25
Fracasso	93,48%	9	129
Total	80,35%	19	154

2008

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	15.09%	8	45
Fracasso	94.19%	9	146
Total	74.04%	17	191

2009

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	25,81%	16	46
Fracasso	92,09%	11	128
Total	71,64%	27	174

QUADRO A5.8 – MODELO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA MÚLTIPLA VIA *FORWARD STEPWISE*

Var.	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Const.	-1,31103	-1,59893	-1,70399	-3,02392	-1,32804	-2,2154	0,12097	-1,0531	-1,48448	-1,0789	-3,6830
PM	3,28245	3,22660			0,86871	0,38710		7,65585	0,41866		
DY				0,33353		0,62457			0,51887		0,3032
P/L											
P/V											
P/VC		-2,38445					0,43196	-2,5449		1,01436	
P/VCT											
P/CGL			0,51140								
ROE											
ROA											
ROC									0,28183		
ML											
MCL											
LC										0,40166	
LS											
LG				-0,53125							
LI	0,80442		0,37812								
GE	1,28116										
PCTRT											-32,166
GCPCT				-2,72711							
CP							-2,6039				
LGM											
GEM	-0,86657										



QUADROS A5.9 – MATRIZ CONFUSÃO DA MODELO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA  
MÚLTIPLA VIA *FORWARD STEPWISE* PELA ABORDAGEM LACHENBRUCH

1999

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	38,46%	10	16
Fracasso	96,84%	3	92
Total	84,30%	13	108

2000

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	32,14%	9	19
Fracasso	98,51%	2	132
Total	87,04%	11	151

2001

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	6,25%	2	30
Fracasso	99,38%	1	161
Total	84,02%	3	191

2002

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	0,00%	0	14
Fracasso	99,40%	1	166
Total	91,71%	1	180

2003

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	8,33%	3	33
Fracasso	99,22%	1	129
Total	79,82%	4	162

2004

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	8,70%	2	21
Fracasso	98,83%	2	169
Total	88,14%	4	190

2005

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso

Sucesso	8,33%	4	44
Fracasso	98,72%	2	154
Total	77,45%	6	198

2006

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	31,03%	9	20
Fracasso	97,92%	3	141
Total	86,71%	12	161

2007

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	14,29%	5	30
Fracasso	97,83%	3	135
Total	80,92%	8	165

2008

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	5,66%	3	50
Fracasso	98,71%	2	153
Total	75,00%	5	203

2009

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	4,84%	3	59
Fracasso	99,28%	1	138
Total	70,15%	4	197

#### QUADROS A5.10 – CARTEIRAS FORMADAS PEÇO MODELO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA MÚLTIPLA

Com todas as variáveis

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
USIM5	FJTA4	APT14	RAPT4	FLCL5	ARCE3	RCSL4	HAGA4	ESTR4	LPSB3
CPL6	MAGS5	DXTG4	NETC4	CNFB4	BDLL4	IMBI4	WISA4	TOYB3	DASA3
CMIG4	RPSA4	ETER3	CGAS5	COCE5	FBRA4	MWET4	IGBR3	HOOT4	RENT3
VALE5	UNIP6	EMAE4	BRKM5	DURA4		JFEN3	HGTX3	CARD3	TAMM4
ELET3	ACES4	BSUL5	LAME4	LAME4		MGEL4	MLFT4	INEP4	BRKM5
TLPP4	FFTL4	TRPL4	CPSL3	SBSP3		SZPQ4	LIGT3	FRAS4	GETI4
PETR4	UGPA4	UGPA4	ACES4	ITSA3		BRFS3	WHRL4	BTTL4	WEGE3
BUET4	CSTB4	TMAR5	BRAP4	AMBV4		SUZB5	TRPL4	KEPL3	CRUZ3
TPEC6B	SUZB5	TLPP4	GOAU4	PETR4		BRAP4	UGPA4	HGTX3	CPFE3
VAGV4	USIM5	VALE5	FFTL4	STRP4		GOAU4	CPL6	JFEN3	PMET6
LIGT3	GGBR4	PETR4	CSPC4	LUXM4		BRTO4	SBSP3	EUCA4	TOYB3
ENMA3B	BRTP3		USIM5	SNSY5		TNLP4	BRTP3	SLED4	TCNO3
SBSP3	BRTO4		CMET4	INEP4		TMAR5	BRTO4	CTAX4	MWET4

AMBV4	TNLP4		CSNA3	DROG3		CSNA3	CPFE3	CCIM3	RSUL4
CHAP3	TLPP4		AMBV4	LECO4		USIM5	VIVO4	PLAS3	EALT4
	AMBV4		VALE5	BUET4		GGBR4	TNLP4	ODPV3	PTBL3
	VALE5		FBMC4	VGOR4		VALE5	TMAR5	PFRM3	MTIG4
	BFCV4		VPTA4	CEBR6		PETR4	CMIG4	ROMI3	CARD3
	SCLO4		MNSA4	TMAC8B		HAGA4	TLPP4	PMAM3	IDNT3
	GAZO4		TEKA4	PTBL3		CORR4	ITSA3	OHLB3	RANI3
	FBMC4		MNDL4	CMGR4		GAZO4	AMBV4	POMO4	AFLU3
	MNSA4		VGOR4	LFEE4		VPSC4	PETR4	EVEN3	RHDS3
	LUXM4		CMGR4	VINE5		WISA4	GAZO4	TOTS3	GPIV11
	HBTS5		PTBL3	AELP3		HOOT4	SCLO4	RHDS3	VULC3
	CCTU4		FBRA4	TNCP3		HETA4	CAFE4	IGTA3	MMXM3
	SNSY5		CEBR6	EMAE4		LUXM4	HOOT4	MYPK3	CEGR3
	RCSL4		DXTG4	EEEL3		PMET6	RCSL4	POS13	ALLL3
	FTRX4		AVIL3	MLFT4		TOYB3	LETO5	MDIA3	RDCD3
	SHUL4		FRAS4	PMAM3		HBTS5	STRP4	DASA3	
	TRFO4		RHDS3	RGEG3		FBMC4	HETA4	RAPT4	
	SOND6		SLED4	CEGR3		GRNL4	SNSY5	RSID3	
	PTBL3		ESCE3	SAPR4		EALT4	JBDU4	AVIL3	
	MTSA4		SALM4	SZPQ4		SGEN4	LUXM4	RENT3	
	MWET4		AESL3	RPSA4		MNDL4	DHBI4	GUAR3	
	DUQE4		CLSC6	GEPA4		CEBR6	TEKA4	LREN3	
	SULT4		MLFT4	NETC4		HGTX3	RNPT3	GVTT3	
	MGEL4		CPFG3	BRAP4		EUCA4	DUQE4	TAMM4	
	TKNO4		CEGR3	CBEE3		VINE5	SULT4	GOLL4	
	JFEN3		POMO4	LIGT3		MEND6	ESTR4	BRKM5	
	BIOB4		ITEC3	BRKM5		TUPY3	LIXC4	CYRE3	
	PNVL3		BRFS3	BRTO4		BOBR4	SOND6	SUZB5	
	PTNT4		PQUN4	PCAR5		LFEE4	CTKA4	LAME4	
	CGRA4		SDIA4	BRTP3		PLTO6	MNDL4	CCRO3	
	TEKA4		PITI4	ARCZ6		MOAR3	SGEN4	GOAU4	
	ILMD4		EBCO4	VIVO4		FLCL5	INEP4	MMXM3	
	ELEK4		PALF3	TMAR5		EEEL3	RSIP3	BRAP4	
	RHER4		VIVO4	TNLP4		SCAR3	PATI3	USIM5	
	ROMI3		CRUZ3	EMBR3		ELEK4	MTSA4	GGBR4	
	PEFX3		ARCZ6	ELET3		REDE4	MGEL4	CSNA3	
	FESA4		EMBR3	TLPP4		CSRN6	BDLL4	VALE5	
	RAPT4		TNLP4	VALE5		CELP5	MEND6	SCLO4	
	PNOR5					CMGR4	IGUA3	HAGA4	
	SGAS4					SAPR4	VGOR4	SJOS4	
	FRAS4					CGOS3	EUCA4	STRP4	
	SALM4					AVIL3	PNVL3	FTRX4	
	SOLO4					CEGR3	CEBR6	AHEB5	
	PLDN4					UNIP6	EMAE4	BAUH4	
	TIBR5					CLSC6	MSPA3	SNSY5	
	AVIL3					CTNM4	PTPA4	LUXM4	
	CMGR4					CEPE5	RPAD6	TEKA4	
	VGOR4					AELP3	BRGE12	CAMB4	
	PLTO6					RGEG3	PEAB3	SGEN4	
	MOAR3					LIGT3	IENG5	NUTR3M	
	ASTA4					ENMA3B	VINE5	REEM4	
	ELEV3					GEPA4	TUPY3	SULT4	
	REPA4					GFSA3	PEFX3	DUQE4	
	CELP5					CSMG3	BOBR4	RCSL4	
	CSPC4					CBEE3	ILMD4	CTSA3	

	POPR4					UGPA4	ITEC3	DTCY3	
	ALBA3					CGAS5	CMGR4	FBMC4	
	ALPA4					CEEB3	SZPQ4	SPRI3	
	RIP14					SDIA4	PQUN4	RNAR3	
	LEVE4					KLBN4	SAPR4	RSUL4	
	LATS3					NETC4	CELP5	PNOR5	
	CPCA4					SBSP3	MAGS5	SOND6	
	DPPI4					BRKM5	UNIP6	TRFO4	
	CLSC6					GETI4	CEPE5	MNDL4	
	BMTO4					ALLL3	AELP3	RSIP3	
	PQUN4					TAMM4	RSID3	PATI3	
	EKTR4					BRTP3	CTNM4	CEDO4	
	ICPI3					CCRO3	TMCP4	BUET4	
	PTIP4					ARCZ6	GEPA4	CTKA4	
	WHRL4					GOLL4	CSMG3	EALT4	
	SDIA4					TBLE3	BRFS3	PNVL3	
	BRKM5					CPFE3	BRKM5	SGAS4	
	ARCE3					CMIG4	SDIA4	GPCP3	
	CEEB3					ELET3	KLBN4	MTIG4	
	CPSL3					AMBV4	EBTP4	MWET4	
	BRDT4						SUZH5	TIBR5	
	PALF3						PCAR5	MNPR3	
	SBSP3						GOAU4	MTSA4	
	EBTP4						BRAP4	CIQU4	
	PCAR5						ARCZ6	RANI3	
	EMBR3						TCSL4	MGEL4	
	ELET3						CSNA3	MRSL4	
	PETR4						GGBR4	AFLU3	
							VALE5	JOPA3	
							USIM5	BDLL4	
								TNCP3	
								IGUA3	
								CGRA4	
								CEBR6	
								VINE5	
								SHUL4	
								EMAE4	
								IDNT3	
								ETER3	
								KSSA3	
								PTPA4	
								MSPA3	
								FJTA4	
								ITEC3	
								ELEK4	
								ABYA3	
								CELP5	
								DXTG4	
								SCAR3	
								LEVE4	
								TUPY3	
								CTNM4	
								SAPR4	
								CMGR4	
								MLFT4	

								CEGR3	
								UNIP6	
								VULC3	
								CSRN6	
								LFEE4	
								CLSC6	
								CNFB4	
								COCE5	
								EEEL3	
								ENMA3B	
								ALPA4	
								CEPE5	
								REDE4	
								SZPQ4	
								AELP3	
								LUPA3	
								ILMD4	
								TMCP4	
								TMGC7	
								SMT03	
								GLOB3	
								GEPA4	
								GFSA3	
								CBEE3	
								DURA4	
								ENBR3	
								LIGT3	
								WHRL4	
								CGAS5	
								EKTR4	
								KLBN4	
								CEEB3	
								TRPL4	
								GETI4	
								NETC4	
								ELPL4	
								EBTP4	
								SDIA4	
								NATU3	
								CPLE6	
								PCAR5	
								BRFS3	
								CASN4	
								UGPA4	
								FFTL4	
								SBSP3	
								CESP6	
								BRTP3	
								WEGE3	
								EMBR3	
								ARCZ6	
								CRUZ3	
								CMIG4	
								TCSL4	
								TBLE3	

								BRTO4	
								VIVO4	
								CPFE3	
								TNLP4	
								TLPP4	
								TMAR5	
								ELET3	
								ITSA3	
								AMBV4	
								PETR4	

*Método forward stepwise*

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
PETR4	PETR4	BSUL5	GOAU4	AMBV4	JFEN3	RCSL4	ITSA3	PETR4	LPSB3
TLPP4	ELET3	VALE5	FBMC4	PETR4	FJTA4	IMBI4	PETR4	CELP5	LAME4
ELET3	VALE5		TEKA4	ELET3	POMO4	MWET4	SCLO4	VALE5	GETI4
VALE5	AMBV4		CEBR6	TLPP4	ALPA4	JFEN3	RCSL4	EALT4	CRUZ3
CHAP3	TLPP4		EKTR4	VALE5	MAGS5	VGOR4	LETO5	EKTR4	TOYB3
VAGV4	TNLP4				SAPR4	MGEL4	STRP4	WHRL4	AFLU3
BRTO4	EMBR3				CTNM4	EMAE4	HETA4	LIGT3	BMKS3
AMBV4	EBTP3				DURA4	SZPQ4	SNSY5		GPIV11
ITSA3	BRTO4				PTIP4	PQUN4	JBDU4		LUPA3
SBSP3	PCAR5				SDIA4	BRFS3	LUXM4		BTOW3
BUET4	BRTP3				FFTL4	SUZB5	DHBI4		RDCD3
EMBR3	ITSA3				UGPA4	BRAP4	TEKA4		CSNA3
OXIT4	SBSP3				SUZB5	GOAU4	GFS43		
CPL6	CPL6				GETI4	BRTO4	CEEB3		
PLTO6	VIVO4				KLBN4	TNLP4	GUAR3		
CMIG4					GOAU4	TMAR5	DURA4		
BRKM5					CPSL3	CSNA3	EKTR4		
					CRUZ3	USIM5	TAMM4		
					USIM5	GGBR4	LAME4		
					EMBR3	VALE5	WEGE3		
					ITSA3	PETR4	TBLE3		
					CSNA3	HAGA4	GOLL4		
					AMBV4	CORR4	ALLL3		
					HBTS5	CBMA4	EMBR3		
					FBMC4	GAZO4			
					GRNL4	VPSC4			
					PTNT4	WISA4			
					CCTU4	HOOT4			
					DROG3	HETA4			
					LECO4	SNSY5			
					CTKA4	LUXM4			
					CGRA4	TOYB3			
					BDLL4	HBTS5			
					RANI3	FBMC4			
					PNVL3	GRNL4			
					MTSA4	CTKA4			
					TNCP3	EALT4			
					IGUA3	RANI3			
					RPMG3	MNDL4			
					PTPA4	CEBR6			
					PATI3	HGTX3			
					MRSL4	EUCA4			

					FBRA4	VINE5			
					ASTA4	MEND6			
					TIBR5	TUPY3			
					ROMI3	BOBR4			
					ILMD4	LFPE4			
					MOAR3	PLTO6			
					CLSC6	MOAR3			
					CEPE5	ELEV3			
					DPPI4	FLCL5			
					GEPA4	PEFX3			
					AVIL3	EEEL3			
					PQUN4	SCAR3			
					LEVE4	ELEK4			
					CEEB3	REDE4			
					BRFS3	CSRN6			
					TCSL4	CELP5			
					BRTO4	CMGR4			
					TBLE3	SAPR4			
					ARCZ6	PMAM3			
					CMIG4	CGOS3			
					GGBR4	AVIL3			
					TMAR5	CEGR3			
					TLPP4	UNIP6			
					PETR4	CLSC6			
						CTNM4			
						CEPE5			
						AELP3			
						RGEG3			
						LIGT3			
						ENMA3B			
						GEPA4			
						GFSA3			
						CSMG3			
						CBEE3			
						UGPA4			
						DASA3			
						CGAS5			
						CEEB3			
						SDIA4			
						KLBN4			
						NETC4			
						EKTR4			
						SBSP3			
						CPLE6			
						BRKM5			
						GETI4			
						ALLL3			
						LAME4			
						TAMM4			
						BRTP3			
						CCRO3			
						ARCZ6			
						GOLL4			
						TBLE3			
						CPFE3			

						CMIG4			
						ELET3			
						AMBV4			

12 primeiras do método *forward stepwise*

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
PETR4	PETR4	BSUL5	CEBR6	PETR4	BDLL4	CBMA4	PETR4	PETR4	RDGD3
TLPP4	ELET3	VALE5	FBMC4	VALE5	CGRA4	BRAP4	VALE5	CELP5	LPSB3
ELET3	VALE5	STRP4	GOAU4	AMBV4	ILMD4	WISA4	AMBV4	VALE5	GETI4
VALE5	AMBV4	TLPP4	TEKA4	TLPP4	CEPE5	VPSC4	ITSA3	EALT4	LAME4
CHAP3	TLPP4	TMAR5	EKTR4	ELET3	TLPP4	SUZB5	USIM5	EKTR4	BMKS3
VAGV4	TNLP4	APT4	NETC4	EMBR3	CCTU4	ALLL3	TLPP4	WHRL4	BTOW3
BRTO4	EMBR3	UGPA4	CREM4old	CSNA3	PTNT4	TOYB3	GGBR4	LIGT3	TOYB3
AMBV4	EBTP4	SULT4	MNDL4	TNLP4	CEEB3	VALE5	CSNA3	TRPL4	GPIV11
ITSA3	BRTO4	PLTO6	LIGT3	TMAR5	CPSL3	ARCZ6	TCSL4	TLPP4	CRUZ3
SBSP3	PCAR5	PVLT3	MNSA4	VIVO4	PETR4	CCRO3	TMAR5	GETI4	AFLU3
BUET4	BRTP3	DXTG4	LAME4	ITSA3	DPPI4	MWET4	CMIG4	ELPL4	CSNA3
EMBR3	ITSA3	CGRA4	ITSA3	ARCZ6	TNCP3	MNDL4	TNLP4	STRP4	LUPA3
PETR4	PETR4	BSUL5	CEBR6	PETR4	BDLL4	CBMA4	PETR4	PETR4	RDGD3
TLPP4	ELET3	VALE5	FBMC4	VALE5	CGRA4	BRAP4	VALE5	CELP5	LPSB3
ELET3	VALE5	STRP4	GOAU4	AMBV4	ILMD4	WISA4	AMBV4	VALE5	GETI4

QUADROS A5.11 – RENTABILIDADES DAS CARTEIRAS CONSTRUÍDAS PELO MODELO FDLF 12 *FORWARD STEPWISE*

Período de investimento de um ano

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	0,46%	-8,56%	-0,0273	- 0,0498	-5,46%
2001	16,85%	-16,19%	-0,0021	- 0,0733	15,80%
2002	59,69%	67,51%	0,1968	0,1234	18,69%
2003	41,74%	18,38%	0,0995	0,0060	25,54%
2004	38,47%	35,50%	0,0824	0,0498	8,22%
2005	68,45%	18,81%	0,2059	0,0169	55,08%
2006	14,89%	28,60%	0,0098	0,0400	-3,60%
2007	-44,02%	-39,86%	-0,0686	- 0,0627	-7,74%
2008	36,54%	55,50%	0,0939	0,1182	12,39%
2009	5,85%	0,81%	-0,0003	- 0,0281	1,21%
<b>Média</b>	23,89%	16,05%	0,0590	0,0140	12,01%

Período de investimento de dois anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	-5,46%	-24,75%	- 0,0779	- 0,0617	-32,19%
2001	15,80%	51,32%	0,0389	0,0149	20,25%
2002	18,69%	85,89%	0,1190	0,0669	37,55%
2003	25,54%	53,88%	0,1350	0,0276	64,12%
2004	8,22%	54,31%	0,0625	0,0330	20,51%
2005	55,08%	47,41%	0,1384	0,0292	77,69%
2006	-3,60%	-11,26%	- 0,0636	- 0,0254	-65,40%
2007	-7,74%	14,34%	- 0,0079	- 0,0049	-4,36%



2008	12,39%	55,01%	0,0352	0,0599	2,55%
<b>Média</b>	45,36%	36,24%	0,0422	0,0155	13,41%

Período de investimento de três anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	45,23%	42,76%	- 0,0081	- 0,0076	-3,66%
2001	78,37%	69,70%	0,0252	0,0123	16,21%
2002	120,93%	121,39%	0,0890	0,0615	35,54%
2003	148,80%	72,69%	0,1313	0,0240	98,64%
2004	82,38%	82,91%	0,0403	0,0355	8,12%
2005	81,82%	7,54%	0,0511	- 0,0154	54,39%
2006	7,43%	42,94%	- 0,0144	0,0067	-28,70%
2007	14,31%	15,15%	- 0,0089	- 0,0083	-2,03%
<b>Média</b>	72,41%	56,88%	0,0382	0,0136	22,31%

Período de investimento de cinco anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	99,40%	96,64%	0,0074	0,0045	7,51%
2001	125,82%	124,01%	0,0274	0,0199	20,76%
2002	175,00%	168,79%	0,0716	0,0480	50,58%
2003	138,16%	61,43%	0,0500	- 0,0023	73,32%
2004	96,42%	97,25%	0,0171	0,0145	7,56%
2005	101,30%	62,55%	0,0388	0,0047	51,09%
<b>Média</b>	122,68%	101,78%	0,0354	0,0149	35,14%

QUADROS A5.12 – RENTABILIDADES DAS CARTEIRAS CONSTRUÍDAS PELO MODELO MRLM 12 *FORWARD STEPWISE*

Período de investimento de um ano

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	7,89%	-8,56%	- 0,0213	- 0,0498	5,44%
2001	-10,30%	-16,19%	- 0,0844	- 0,0733	-6,39%
2002	57,52%	67,51%	0,1435	0,1234	25,44%
2003	44,18%	18,38%	0,1027	0,0060	27,83%
2004	27,05%	35,50%	0,0349	0,0498	-3,51%
2005	68,45%	18,81%	0,2049	0,0169	55,08%
2006	26,98%	28,60%	0,0338	0,0400	4,14%
2007	-28,50%	-39,86%	- 0,0603	- 0,0627	-0,80%
2008	33,72%	55,50%	0,1124	0,1182	7,96%
2009	9,19%	0,81%	0,0060	- 0,0281	6,46%
<b>Média</b>	23,62%	16,05%	0,0472	0,0140	12,16%

Período de investimento de dois anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe	Alfa de Jensen da
-----	---------------------	------------------	------------------------	---------------	-------------------

				Ibovespa	carteira
2000	-1,36%	-24,75%	-0,0561	- 0,0617	-8,13%
2001	35,80%	51,32%	-0,0019	0,0149	-11,67%
2002	97,17%	85,89%	0,1129	0,0669	49,74%
2003	95,46%	53,88%	0,1145	0,0276	55,18%
2004	40,81%	54,31%	0,0191	0,0330	-7,69%
2005	107,44%	47,41%	0,1384	0,0292	77,69%
2006	-47,27%	-11,26%	-0,0535	- 0,0254	-48,48%
2007	6,03%	14,34%	-0,0138	- 0,0049	-9,97%
2008	35,94%	55,01%	0,0482	0,0599	3,89%
<b>Média</b>	41,11%	36,24%	0,0342	0,0155	11,17%

#### Período de investimento de três anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	42,54%	42,76%	-0,0115	- 0,0076	-5,77%
2001	53,95%	69,70%	0,0007	0,0123	-11,65%
2002	101,32%	121,39%	0,0624	0,0615	31,61%
2003	140,27%	72,69%	0,1078	0,0240	86,65%
2004	77,75%	82,91%	0,0364	0,0355	3,43%
2005	81,82%	7,54%	0,0511	- 0,0154	54,39%
2006	9,53%	42,94%	-0,0123	0,0067	-30,05%
2007	11,81%	15,15%	-0,0127	- 0,0083	-7,04%
<b>Média</b>	64,87%	56,88%	0,0277	0,0136	15,20%

#### Período de investimento de cinco anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	98,33%	96,64%	0,0075	0,0045	6,16%
2001	107,17%	124,01%	0,0149	0,0199	-6,33%
2002	186,51%	168,79%	0,0648	0,0480	83,25%
2003	87,71%	61,43%	0,0112	- 0,0023	23,02%
2004	80,73%	97,25%	0,0097	0,0145	-8,75%
2005	101,30%	62,55%	0,0388	0,0047	51,09%
<b>Média</b>	110,29%	101,78%	0,0245	0,0149	24,74%

## APÊNDICE 6 – RESULTADOS DA ÁRVORE DE DECISÃO

### A6.1 – Árvores de decisão montadas a partir da entropia de Rényi

1999

```
PM <= 0.7
|   LG <= 0.92
|   |   LC <= 0.91: Fracasso (92.0/13.0)
|   |   LC > 0.91: Sucesso (5.0)
|   LG > 0.92: Fracasso (16.0)
PM > 0.7: Sucesso (8.0)
```

Número de folhas: 4  
Tamanho da árvore: 7

2000

```
PM <= -0.19: Fracasso (104.0/4.0)
PM > -0.19
|   MCL <= -0.07
|   |   LG <= -0.58: Fracasso (12.0)
|   |   LG > -0.58
|   |   |   CP <= -0.29
|   |   |   |   ROE <= -0.29: Fracasso (3.0/1.0)
|   |   |   |   ROE > -0.29: Sucesso (3.0)
|   |   |   CP > -0.29: Fracasso (5.0)
|   MCL > -0.07
|   |   P/VC <= 0.16
|   |   |   PM <= 0.06
|   |   |   |   ML <= -0.12
|   |   |   |   |   P/VC <= -0.13: Sucesso (4.0)
|   |   |   |   |   P/VC > -0.13
|   |   |   |   |   |   GE <= -0.31: Fracasso (3.0)
|   |   |   |   |   |   GE > -0.31
|   |   |   |   |   |   |   MCL <= 0.01: Sucesso (4.0)
|   |   |   |   |   |   |   MCL > 0.01: Fracasso (4.0/1.0)
|   |   |   |   ML > -0.12: Fracasso (5.0)
|   |   |   PM > 0.06: Sucesso (11.0)
|   |   P/VC > 0.16: Fracasso (4.0)
```

Número de folhas: 12  
Tamanho da árvore: 23

2001

```
PM <= -0.26: Fracasso (94.0/2.0)
PM > -0.26
|   ML <= -0.24: Fracasso (23.0/1.0)
|   ML > -0.24
```

```

|      |      ROE <= -0.05
|      |      |      GEM <= 0
|      |      |      |      MCL <= -0.01: Fracasso (56.0/21.0)
|      |      |      |      MCL > -0.01: Sucesso (3.0)
|      |      |      GEM > 0: Sucesso (4.0)
|      |      ROE > -0.05: Fracasso (14.0/1.0)

```

Número de folhas: 6  
Tamanho da árvore: 11

2002

```

GEM <= -0.1: Fracasso (60.0)
GEM > -0.1
|      PM <= -0.2: Fracasso (68.0/1.0)
|      PM > -0.2
|      |      PM <= 0.26
|      |      |      CP <= -1.04: Fracasso (7.0)
|      |      |      CP > -1.04
|      |      |      |      LG <= 0.12
|      |      |      |      |      MCL <= -0.13: Fracasso (3.0)
|      |      |      |      |      MCL > -0.13: Sucesso (24.0/11.0)
|      |      |      |      LG > 0.12: Fracasso (7.0)
|      |      PM > 0.26: Fracasso (12.0)

```

Número de folhas: 7  
Tamanho da árvore: 13

2003

```

PM <= -0.27
|      P/V <= -0.25
|      |      PM <= -0.3: Fracasso (12.0)
|      |      PM > -0.3
|      |      |      LG <= -0.42: Fracasso (5.0)
|      |      |      LG > -0.42: Sucesso (3.0/1.0)
|      P/V > -0.25: Fracasso (55.0)
PM > -0.27: Fracasso (91.0/33.0)

```

Número de folhas: 5  
Tamanho da árvore: 9

2004

```

PM <= -0.15: Fracasso (141.0/9.0)
PM > -0.15
|      GEM <= -0.11
|      |      DY <= -0.57
|      |      |      PM <= -0.03: Fracasso (3.0/1.0)
|      |      |      PM > -0.03: Sucesso (2.0)
|      |      DY > -0.57: Fracasso (18.0/4.0)
|      GEM > -0.11: Fracasso (30.0/7.0)

```

Número de folhas: 5  
Tamanho da árvore: 9

2005

: Fracasso (204.0/48.0)

Número de folhas: 1  
Tamanho da árvore: 1

2006

: Fracasso (190.0/29.0)

Número de folhas: 1  
Tamanho da árvore: 1

2007

```
LC <= 1.193
|
|   PM <= -0.1921
|   |
|   |   LS <= 0.7095: Fracasso (87.0/5.0)
|   |   LS > 0.7095
|   |   |
|   |   |   MCL <= -0.0463: Fracasso (2.0)
|   |   |   MCL > -0.0463: Sucesso (4.0)
|   |
|   |   PM > -0.1921
|   |   |
|   |   |   ROC <= 0.2078
|   |   |   |
|   |   |   |   LC <= 0.5116
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |   P/VCT <= 0.0471
|   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   LGM <= -0.8082: Fracasso (4.0)
|   |   |   |   |   |   LGM > -0.8082
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   PM <= 0.1198
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   P/L <= -0.2549: Sucesso (4.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   P/L > -0.2549
|   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   DY <= 0.3924
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   P/V <= -0.1059: Fracasso
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   (3.0/1.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   P/V > -0.1059: Sucesso (3.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   DY > 0.3924: Fracasso (5.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   PM > 0.1198: Sucesso (10.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   P/VCT > 0.0471
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   P/CGL <= 1.6154: Fracasso (13.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   P/CGL > 1.6154: Sucesso (3.0/1.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   LC > 0.5116: Fracasso (9.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   ROC > 0.2078: Sucesso (6.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   LC > 1.193: Fracasso (20.0)
```

Número de folhas: 14  
Tamanho da árvore: 27

2008

```

P/VCT <= -0.2929
|   ROC <= -0.3707: Fracasso (27.0)
|   ROC > -0.3707
|   |   DY <= -0.5543
|   |   |   ROC <= -0.3499: Sucesso (3.0)
|   |   |   ROC > -0.3499
|   |   |   |   P/V <= -0.1982: Fracasso (13.0)
|   |   |   |   P/V > -0.1982
|   |   |   |   |   ROE <= -0.0054
|   |   |   |   |   |   GEM <= -0.1993: Fracasso (3.0)
|   |   |   |   |   |   GEM > -0.1993: Sucesso (4.0/1.0)
|   |   |   |   |   |   ROE > -0.0054: Fracasso (5.0)
|   |   |   |   |   DY > -0.5543: Fracasso (11.0)
P/VCT > -0.2929: Fracasso (142.0/47.0)

```

Número de folhas: 8  
Tamanho da árvore: 15

2009

: Fracasso (201.0/62.0)

Número de folhas: 1  
Tamanho da árvore: 1

## A6.2 – Árvores de decisão montadas a partir da entropia de Shannon

1999

```

PM <= 0.7: Fracasso (113.0/18.0)
PM > 0.7: Sucesso (8.0)

```

Número de folhas: 2  
Tamanho da árvore: 3

2000

```

PM <= -0.19: Fracasso (104.0/4.0)
PM > -0.19
|   MCL <= -0.07
|   |   LG <= -0.58: Fracasso (12.0)
|   |   LG > -0.58
|   |   |   CP <= -0.29
|   |   |   |   ROE <= -0.29: Fracasso (3.0/1.0)
|   |   |   |   ROE > -0.29: Sucesso (3.0)
|   |   |   |   CP > -0.29: Fracasso (5.0)
|   |   MCL > -0.07
|   |   |   P/VC <= 0.16
|   |   |   |   PM <= 0.06
|   |   |   |   |   ML <= -0.12
|   |   |   |   |   |   P/VC <= -0.13: Sucesso (4.0)
|   |   |   |   |   |   P/VC > -0.13
|   |   |   |   |   |   |   ROE <= -0.27: Fracasso (6.0/1.0)

```

```

|      |      |      |      |      ROE > -0.27: Sucesso (5.0/1.0)
|      |      |      |      |      ML > -0.12: Fracasso (5.0)
|      |      |      |      |      PM > 0.06: Sucesso (11.0)
|      |      |      |      |      P/VC > 0.16: Fracasso (4.0)

```

Número de folhas: 11  
Tamanho da árvore: 21

2001

```

PM <= -0.26: Fracasso (94.0/2.0)
PM > -0.26
|      ML <= -0.24: Fracasso (23.0/1.0)
|      ML > -0.24
|      |      ROE <= -0.05
|      |      |      GEM <= 0
|      |      |      |      MCL <= -0.01: Fracasso (56.0/21.0)
|      |      |      |      MCL > -0.01: Sucesso (3.0)
|      |      |      |      GEM > 0: Sucesso (4.0)
|      |      |      |      ROE > -0.05: Fracasso (14.0/1.0)

```

Número de folhas: 6  
Tamanho da árvore: 11

2002

```

PM <= -0.2: Fracasso (113.0/1.0)
PM > -0.2
|      GEM <= -0.06: Fracasso (46.0/4.0)
|      GEM > -0.06
|      |      CP <= -0.59: Fracasso (8.0)
|      |      CP > -0.59
|      |      |      P/L <= -0.1: Sucesso (8.0/1.0)
|      |      |      P/L > -0.1
|      |      |      |      DY <= -0.28: Fracasso (3.0)
|      |      |      |      DY > -0.28: Sucesso (3.0/1.0)

```

Número de folhas: 6  
Tamanho da árvore: 11

2003

```

PM <= -0.27: Fracasso (75.0/2.0)
PM > -0.27
|      ML <= -0.15
|      |      P/V <= -0.17
|      |      |      ML <= -0.21: Fracasso (4.0)
|      |      |      ML > -0.21
|      |      |      |      P/V <= -0.18
|      |      |      |      |      P/V <= -0.24: Sucesso (2.0)
|      |      |      |      |      P/V > -0.24: Fracasso (26.0/9.0)
|      |      |      |      |      P/V > -0.18: Sucesso (3.0)
|      |      |      |      |      P/V > -0.17

```

```

|      |      |      MCL <= -0.07: Fracasso (16.0)
|      |      |      MCL > -0.07
|      |      |      ROC <= -0.18: Sucesso (2.0)
|      |      |      ROC > -0.18: Fracasso (6.0)
|      |      |      ML > -0.15
|      |      |      MCL <= -0.12: Fracasso (6.0/1.0)
|      |      |      MCL > -0.12
|      |      |      PCTRT <= -0.14
|      |      |      |      P/CGL <= -0.1
|      |      |      |      |      ML <= -0.11: Fracasso (6.0/1.0)
|      |      |      |      |      ML > -0.11: Sucesso (3.0)
|      |      |      |      |      P/CGL > -0.1: Fracasso (4.0)
|      |      |      |      PCTRT > -0.14: Sucesso (13.0/1.0)

```

Número de folhas: 13  
Tamanho da árvore: 25

2004

```

DY <= -0.22: Fracasso (102.0/3.0)
DY > -0.22
|      |      |      P/CGL <= 0.88
|      |      |      |      MCL <= -0.13: Fracasso (15.0)
|      |      |      |      MCL > -0.13
|      |      |      |      |      PCTRT <= -0.13: Fracasso (62.0/11.0)
|      |      |      |      |      PCTRT > -0.13
|      |      |      |      |      |      P/VC <= -0.47: Fracasso (4.0)
|      |      |      |      |      |      P/VC > -0.47: Sucesso (4.0)
|      |      |      |      P/CGL > 0.88
|      |      |      |      |      MCL <= -0.09: Sucesso (5.0)
|      |      |      |      |      MCL > -0.09: Fracasso (2.0)

```

Número de folhas: 7  
Tamanho da árvore: 13

2005

```

PM <= -0.23
|      |      |      CP <= 0.37
|      |      |      |      ROC <= 0.05
|      |      |      |      |      P/VC <= -0.51
|      |      |      |      |      |      PM <= -0.28
|      |      |      |      |      |      |      MCL <= -0.498213: Fracasso (3.0)
|      |      |      |      |      |      |      MCL > -0.498213: Sucesso (2.0)
|      |      |      |      |      |      |      PM > -0.28: Fracasso (2.0)
|      |      |      |      |      |      P/VC > -0.51: Sucesso (3.0)
|      |      |      |      |      ROC > 0.05: Fracasso (13.0/1.0)
|      |      |      |      CP > 0.37: Fracasso (88.0/4.0)
|      |      |      PM > -0.23: Fracasso (93.0/38.0)

```

Número de folhas: 7  
Tamanho da árvore: 13



2006

```
PM <= 0.5535
|   P/VCT <= -0.0514
|   |   MCL <= -0.087
|   |   |   PCTRT <= -0.0793
|   |   |   |   DY <= -0.4992: Fracasso (13.0)
|   |   |   |   DY > -0.4992
|   |   |   |   |   PCTRT <= -0.1212
|   |   |   |   |   |   LC <= 0.9544: Sucesso (9.0/1.0)
|   |   |   |   |   |   LC > 0.9544: Fracasso (2.0)
|   |   |   |   |   |   PCTRT > -0.1212: Fracasso (3.0)
|   |   |   |   PCTRT > -0.0793: Sucesso (3.0)
|   |   |   MCL > -0.087: Fracasso (100.0/11.0)
|   |   P/VCT > -0.0514: Fracasso (47.0)
PM > 0.5535
|   CP <= 0.0439
|   |   P/L <= -0.0872: Fracasso (2.0)
|   |   P/L > -0.0872: Sucesso (7.0)
|   CP > 0.0439: Fracasso (4.0)
```

Número de folhas: 10

Tamanho da árvore: 19

2007

```
PM <= -0.1921: Fracasso (107.0/9.0)
PM > -0.1921
|   LC <= 0.5116
|   |   ROC <= 0.2078
|   |   |   P/VCT <= 0.0471
|   |   |   |   LGM <= -0.8082: Fracasso (4.0)
|   |   |   |   LGM > -0.8082
|   |   |   |   |   PM <= 0.1198
|   |   |   |   |   |   P/L <= -0.2549: Sucesso (4.0)
|   |   |   |   |   |   P/L > -0.2549
|   |   |   |   |   |   |   DY <= 0.3924
|   |   |   |   |   |   |   |   P/V <= -0.1059: Fracasso (3.0/1.0)
|   |   |   |   |   |   |   |   P/V > -0.1059: Sucesso (3.0)
|   |   |   |   |   |   |   DY > 0.3924: Fracasso (5.0)
|   |   |   |   |   PM > 0.1198: Sucesso (10.0)
|   |   |   P/VCT > 0.0471
|   |   |   |   P/CGL <= 1.6154: Fracasso (13.0)
|   |   |   |   P/CGL > 1.6154: Sucesso (3.0/1.0)
|   |   ROC > 0.2078: Sucesso (6.0)
|   LC > 0.5116: Fracasso (15.0)
```

Número de folhas: 11

Tamanho da árvore: 21

2008

: Fracasso (208.0/53.0)

Número de folhas: 1  
Tamanho da árvore: 1

2009

```

PM <= -0.1989
|   P/VC <= -0.4516
|   |   PM <= -0.2039: Fracasso (15.0)
|   |   PM > -0.2039
|   |   |   P/V <= -0.1948: Fracasso (3.0)
|   |   |   P/V > -0.1948: Sucesso (4.0)
|   |   P/VC > -0.4516: Fracasso (45.0)
PM > -0.1989
|   ROC <= -0.1076
|   |   P/L <= -0.1705: Fracasso (16.0)
|   |   P/L > -0.1705
|   |   |   P/V <= -0.1844: Fracasso (6.0)
|   |   |   P/V > -0.1844
|   |   |   |   P/VC <= -0.0309
|   |   |   |   |   PCTRT <= -0.0983: Fracasso (2.0)
|   |   |   |   |   PCTRT > -0.0983: Sucesso (6.0)
|   |   |   |   P/VC > -0.0309: Fracasso (4.0)
|   |   ROC > -0.1076: Sucesso (100.0/48.0)

```

Número de folhas: 10  
Tamanho da árvore: 19

#### QUADRO A6.3 – INFORMAÇÃO MÚTUA QUADRÁTICA DE RÉNYI COM O GRUPO SUCESSO/FRACASSO<sup>17</sup>

Var.	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
PM	1,0000	0,7190	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
DY	0,0092	0,0243	0,0221	0,0436	0,0788	0,0317	0,0872	0,0120	0,0138	0,0082	0,0000
P/L	0,2218	0,0595	0,3310	0,7986	0,0658	0,7068	0,0486	0,0502	0,0407	0,0272	0,0298
P/V	0,2201	0,1238	0,0354	0,0375	0,0590	0,0442	0,0661	0,0483	0,0473	0,0343	0,0298
P/VC	0,5544	1,0000	0,0418	0,0436	0,1032	0,3188	0,0293	0,0723	0,0390	0,0343	0,0251
P/VCT	0,5544	1,0000	0,0418	0,0436	0,1032	0,3188	0,0424	0,0463	0,0570	0,0272	0,0179
P/CGL	0,1229	0,0942	0,0255	0,0466	0,0724	0,1101	0,0327	0,3943	0,0662	0,0343	0,7551
ROE	0,1305	0,0465	0,0354	0,0375	0,0486	0,0898	0,0259	0,0320	0,0473	0,0272	0,0203
ROA	0,1404	0,0408	0,0933	0,0247	0,0494	0,0442	0,0392	0,0443	0,0473	0,0308	0,0343
ROC	0,2031	0,0520	0,0733	0,0312	0,0582	0,0442	0,0259	0,0277	0,0473	0,0198	0,0179
ML	0,2222	0,0542	0,0322	0,0344	0,0547	0,0473	0,0456	0,0502	0,0506	0,0377	0,0366
MCL	0,1326	0,0385	0,0386	0,0436	0,0599	0,0442	0,0633	0,0502	0,0490	0,0411	0,0366
LC	0,2446	0,0292	0,0186	0,0145	0,0486	0,0000	0,0078	0,0073	0,0000	0,0041	0,0079
LS	0,1924	0,0181	0,0255	0,0074	0,0135	0,0000	0,0039	0,0073	0,0231	0,0082	0,0154
LG	0,0448	0,0000	0,0114	0,0145	0,0063	0,0075	0,0039	0,0000	0,0440	0,0082	0,0179

<sup>17</sup> Padronizada entre 0 e 1

LI	0,5928	0,0303	0,0386	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0143	0,0407	0,0160	0,0154
GE	0,2074	0,1366	0,0322	0,0375	0,0432	0,0183	0,0189	0,0403	0,0390	0,0272	0,0203
PCTRT	0,0000	0,0617	0,0186	0,0280	0,0590	0,0412	0,0486	0,0463	0,0473	0,0377	0,0366
GCPCT	0,0653	0,0520	0,0255	0,0344	0,1850	0,0148	0,0224	0,0842	0,0119	0,0308	0,0203
CP	0,0039	0,2267	0,0000	0,0074	0,0556	0,0217	0,0000	0,0073	0,0585	0,0000	0,0251
LGM	0,4065	0,1014	0,0322	0,0037	0,0011	0,0038	0,0078	0,0299	0,0119	0,0160	0,0179
GEM	0,1939	0,1495	0,0322	0,0375	0,0321	0,0112	0,0392	0,0463	0,0424	0,0343	0,0053

QUADRO A6.4 – INFORMAÇÃO MÚTUA DE SHANNON COM O GRUPO SUCESSO/FRACASSO<sup>18</sup>

Var.	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
PM	0,6243	0,8004	0,6710	0,6897	0,6314	0,6929	0,4635	0,5138	0,7299	0,4080	0,5326
DY	0,6400	0,6536	0,7692	0,8345	0,5807	0,7643	0,4641	0,6527	0,5951	0,3870	0,7874
P/L	0,0944	0,0000	0,4072	0,5037	0,0000	0,3736	0,0000	0,0684	0,2812	0,5782	0,3711
P/V	0,4074	0,0936	0,1702	0,4345	0,2983	0,0744	0,6657	0,2861	0,1201	0,2534	0,3164
P/VC	0,6911	0,2546	0,3538	0,2565	0,8103	0,9289	0,6323	0,7275	0,6538	0,5731	0,7112
P/VCT	0,6911	0,2546	0,3538	0,2565	0,8103	0,9289	0,8236	0,4066	0,7275	0,7447	0,8519
P/CGL	0,6072	0,1553	0,3890	0,4665	0,1843	0,4831	0,4734	0,2469	0,5288	0,2891	0,5541
ROE	0,3389	0,3833	0,0449	0,3353	0,5135	0,4172	0,3585	0,2973	0,2468	0,5042	0,4974
ROA	0,1415	0,0152	0,0526	0,1511	0,2114	0,1543	0,2509	0,1353	0,2329	0,3381	0,2596
ROC	0,1240	0,1681	0,0436	0,3883	0,2627	0,2300	0,1958	0,1960	0,3822	0,4271	0,4509
ML	0,0000	0,1039	0,1791	0,1974	0,1744	0,0000	0,1305	0,0000	0,0000	0,0873	0,0195
MCL	0,6800	0,8766	0,9371	1,0000	0,8254	0,9721	0,7136	1,0000	1,0000	0,9847	0,9424
LC	0,7538	0,6964	0,0000	0,0000	0,2071	0,1196	1,0000	0,2228	0,1579	0,0000	0,0000
LS	0,7943	0,6362	1,0000	0,8135	0,7782	0,8550	0,6044	0,7916	0,9127	1,0000	0,9034
LG	0,7388	0,7713	0,9150	0,7647	0,7703	0,7951	0,5934	0,8425	0,9203	0,8701	0,9373
LI	0,7079	0,7268	0,9264	0,7880	0,8976	0,7690	0,6097	0,8676	0,8793	0,8707	1,0000
GE	0,3311	0,4488	0,0373	0,5150	0,5916	0,6305	0,5022	0,5274	0,3604	0,5124	0,5063
PCTRT	0,5374	0,6583	0,4015	0,6405	0,1777	0,1225	0,3778	0,1620	0,1544	0,1405	0,0799
GCPCT	0,8197	1,0000	0,6153	0,5767	0,7811	0,8324	0,4628	0,8835	0,7957	0,8259	0,6944
CP	0,6102	0,6330	0,3935	0,4314	0,6480	0,5398	0,3950	0,5544	0,4278	0,5296	0,5983
LGM	1,0000	0,8754	0,8854	0,8619	1,0000	1,0000	0,6268	0,9251	0,8340	0,8495	0,8677
GEM	0,3116	0,3386	0,0580	0,4247	0,6058	0,6577	1,0000	0,2002	0,2202	0,4352	0,7701

QUADROS A6.5 – MATRIZ CONFUSÃO VIA ENTROPIA DE RÉNYI

1999			
Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	50.00%	13	13

<sup>18</sup> Padronizada entre 0 e 1

Fracasso	100.00%	0	95
Total	89.26%	13	108

2000

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	78.57%	22	6
Fracasso	100.00%	0	134
Total	96.30%	22	140

2001

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	21.88%	7	25
Fracasso	100.00%	0	162
Total	87.11%	7	187

2002

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	92.86%	13	1
Fracasso	93.41%	11	156
Total	93.37%	24	157

2003

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	5.71%	2	33
Fracasso	99.24%	1	130
Total	79.52%	3	163

2004

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	8.70%	2	21
Fracasso	100.00%	0	171
Total	89.18%	2	192

2005

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	0.00%	0	48
Fracasso	100.00%	0	156
Total	76.47%	0	204

2006

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	0.00%	0	29
Fracasso	100.00%	0	161
Total	84.74%	0	190

2007

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	82.86%	29	6
Fracasso	99.28%	1	137
Total	95.95%	30	143

2008

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	11.32%	6	47
Fracasso	99.35%	1	154
Total	76.92%	7	201

2009

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	0.00%	0	62
Fracasso	100.00%	0	139
Total	69.15%	0	201

#### QUADROS A6.6 – MATRIZ CONFUSÃO VIA ENTROPIA DE SHANNON

1999

Grupo	Percentual correto	Class como	Class como
-------	--------------------	------------	------------

		Sucesso	Fracasso
Sucesso	30.77%	8	18
Fracasso	100.00%	0	95
Total	85.12%	8	113

2000

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	78.57%	22	6
Fracasso	99.25%	1	133
Total	95.68%	23	139

2001

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	21.88%	7	25
Fracasso	100.00%	0	162
Total	87.11%	7	187

2002

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	64.29%	9	5
Fracasso	98.80%	2	165
Total	96.13%	11	170

2003

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	62.86%	22	13
Fracasso	99.24%	1	130
Total	91.57%	23	143

2004

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	39.13%	9	14
Fracasso	100.00%	0	171
Total	92.78%	9	185

2005

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	10.42%	5	43
Fracasso	100.00%	0	156
Total	78.92%	5	199

2006

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	62.07%	18	11
Fracasso	99.38%	1	160
Total	93.68%	19	171

2007

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	71.43%	25	10
Fracasso	99.28%	1	137
Total	93.64%	26	147

2008

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	0.00%	0	53
Fracasso	100.00%	0	155
Total	74.52%	0	208

2009

Grupo	Percentual correto	Class como Sucesso	Class como Fracasso
Sucesso	100.00%	62	0
Fracasso	65.47%	48	91
Total	76.12%	110	91

QUADRO A6.7 – CARTEIRAS FORMADAS VIA ENTROPIA DE RÉNYI

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

EMAE4	DURA4	ACES4	CGAS5					POMO4	GSHP3
RPSA4	TRPL4	EEEL3	BRKM5					TAMM4	TPIS3
CTNM4	ACES4	CSPC4	LAME4					GOLL4	CCIM3
BRKM5	BSUL5		CPSL3					BRKM5	SMT03
ITSA3	FFTL4		ACES4					CYRE3	LIXC4
BRTO4	KLBN4		GOAU4					MMXM3	GPCP3
VALE5	UGPA4		CSPC4					BRAP4	PLAS3
ELET3	CMET4		USIM5					CEGR3	PRVI3
TLPP4	TMCP4		BRFS3					CSRN6	INPR3
PETR4	ARCZ6		PQUN4					CLSC6	ACGU3
BIOB4	B RTP3		CEEB3					CNFB4	
VGOR4	AMBV4		PITI4					COCE5	
PLDN4	VALE5		LIGT3					EEEL3	
POPR4	ICPI3		EBCO4					ENMA3B	
DURA4	TLCP4		EBTP4					CEPE5	
SUZB5	TNEP3		SUZB5					ILMD4	
SBSP3	ARCE3		PALF3					TMCP4	
AMBV4	TMGC7							TMGC7	
CHAP3	CEEB3							SMT03	
	CPSL3							GEPA4	
	TCSL4							DURA4	
	CGAS5							ENBR3	
	TSEP3							LIGT3	
	CPLE6							WHRL4	
	VIVO4							EKTR4	
	ELET3							CEEB3	
	PETR4							TRPL4	
								GETI4	
								ELPL4	
								EBTP4	
								NATU3	
								CPLE6	
								CASN4	
								FFTL4	
								SBSP3	
								CESP6	
								B RTP3	
								EMBR3	
								ARCZ6	
								CMIG4	
								TCSL4	
								TBLE3	
								BRTO4	



								VIVO4	
								TLPP4	
								TMAR5	
								ELET3	
								ITSA3	
								PETR4	

QUADRO A6.8 – CARTEIRAS FORMADAS VIA ENTROPIA DE SHANNON

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ITSA3	DURA4	ACES4	LAME4	ALPA4	IMBI4	IMBI4	WHRL4	POMO4	
BRT04	TRPL4	EEEL3	CPSL3	CNFB4	FLCL5	JFEN3	TEKA4	TAMM4	
VALE5	ACES4	CSPC4	GOAU4	GUAR3	BOBR4	FBMC4	SNSY5	GOLL4	
ELET3	BSUL5		ITSA3	CLSC6	POMO4	RANI3	PQUN4	BRKM5	
TLPP4	FFTL4		PQUN4	TCSL4	ALPA4	SGEN4	MGEL4	CYRE3	
PETR4	KLBN4		CEEB3	TRPL4	MAGS5	MNDL4	FBMC4	MMXM3	
SBSP3	UGPA4		SDIA4	GOAU4	COCE5	SHUL4	CSNA3	BRAP4	
AMBV4	CMET4		EBCO4	GGBR4	RAPT4	GPCP3	CELP5	CEGR3	
CHAP3	SUZB5		EMBR3	ITSA3	CTNM4	HGTX3	BRTP3	CSRN6	
	TMCP4			PETR4	DURA4	PTPA4	BRT04	CLSC6	
	ARCZ6			ELEV3	LIGT3	TUPY3	BDLL4	COCE5	
	BRTP3			ALBA3	SDIA4	LFPE4		EEEL3	
	AMBV4			PLTO6	ACES4	ASTA4		ENMA3B	
	VALE5			PEFX3	FFTL4	PLTO6		CEPE5	
	ICPI3			RIPI4	CGAS5	DXTG4		ILMD4	
	TLCP4			MOAR3	UGPA4	MOAR3		TMCP4	
	TNEP3			EEEL3	BRAP4	ELEV3		TMGC7	
	ARCE3			MAGS5	GOAU4	FLCL5		SMT03	
	TMGC7			MLFT4	BRTP3	PEFX3		GEPA4	
	CEEB3			ELEK4	CRUZ3	EEEL3		DURA4	
	CPSL3			ITEC3	USIM5	SCAR3		ENBR3	
	TCSL4			DPPI4	EMBR3	ELEK4		LIGT3	
	CGAS5			RAPT4	ITSA3	REDE4		WHRL4	
	TSEP3			CEPE5	AMBV4	CSRN6		EKTR4	
	CPLE6			ILMD4	SJOS4	CELP5		CEEB3	
	VIVO4			CRBM7	STRP4			TRPL4	
	ELET3			POMO4	JBDU4			GETI4	
	PETR4			CEGR3	RSUL4			ELPL4	
				SAPR4	DTCY3			EBTP4	
				EBCO4	RSIP3			NATU3	
				TPEC6B	HGTX3			CPLE6	
				TPRC6	EUCA4			CASN4	

				LEVE4	SHUL4			FFTL4	
				CTNM4	CGR44			SBSP3	
				CEEB3	PNVL3			CESP6	
				TMGC7	MTSA4			BRTP3	
				ACES4	CMGR4			EMBR3	
				NETC4	SPRI3			CMIG4	
				CRTP5	CIQU4			TCSL4	
				CBEE3	IGUA3			TBLE3	
				LIGT3	RPMG3			BRTO4	
				UGPA4	PTPA4			VIVO4	
				TMCP4	PAT13			TLPP4	
				TSEP3	PTBL3			TMAR5	
				FFTL4	SLED4			ELET3	
				CSPC4	TIBR5			ITSA3	
				SDIA4	ROMI3			PETR4	
				WEGE3	MLFT4				
				TCOC3	FRAS4				
				BRKM5	TDBH3				
				PCAR5	ILMD4				
				BRTP3	MOAR3				
				USIM5	PEFX3				
				CSNA3	ITEC3				
				EMBR3	EBCO4				
				ELET3	DPPI4				
					CEGR3				
					KEPL3				
					CRBM7				
					LEVE4				
					RPSA4				
					ELEK4				
					TMGC7				
					TMCP4				
					GUAR3				
					TCSL4				
					PTQS4				
					PCAR5				
					TBLE3				
					CPFE3				
					ARCZ6				
					BRKM5				
					VIVO4				
					GGBR4				
					TMAR5				

					TLPP4				
					PETR4				

## QUADROS A6.9 – RENTABILIDADES DAS CARTEIRAS CONSTRUÍDAS VIA ENTROPIA DE RÉNYI

Período de investimento de um ano

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	19,70%	-8,56%	0,0079	- 0,0498	0,1674
2001	11,17%	-16,19%	- 0,0386	- 0,0733	0,0788
2002	35,77%	67,51%	0,0444	0,1234	- 0,0808
2003	41,25%	18,38%	0,0850	0,0060	24,30%
2004	0,00%	35,50%	-	0,0498	0,00%
2005	0,00%	18,81%	-	0,0169	0,00%
2006	0,00%	28,60%	-	0,0400	0,00%
2007	0,00%	-39,86%	-	- 0,0627	0,00%
2008	52,13%	55,50%	0,1810	0,1182	0,1879
2009	18,09%	0,81%	0,0480	- 0,0281	18,39%
<b>Média</b>	17,81%	16,05%	0,0328	0,0140	7,80%

Período de investimento de dois anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	14,89%	-24,75%	- 0,0390	- 0,0617	0,0491
2001	77,39%	51,32%	0,0718	0,0149	0,3291
2002	92,15%	85,89%	0,0697	0,0669	0,3077
2003	70,71%	53,88%	0,0676	0,0276	25,98%
2004	0,00%	54,31%	-	0,0330	0,00%
2005	0,00%	47,41%	-	0,0292	0,00%
2006	0,00%	-11,26%	-	- 0,0254	0,00%
2007	0,00%	14,34%	-	- 0,0049	0,00%
2008	65,33%	55,01%	0,1247	0,0599	0,3190
<b>Média</b>	35,61%	36,24%	0,0327	0,0155	14,05%

Período de investimento de três anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	71,11%	42,76%	0,0193	- 0,0076	0,2256
2001	113,00%	69,70%	0,0716	0,0123	0,5113
2002	94,43%	121,39%	0,0403	0,0615	0,0834
2003	96,77%	72,69%	0,0647	0,0240	37,04%
2004	0,00%	82,91%	-	0,0355	0,00%
2005	0,00%	7,54%	-	- 0,0154	0,00%
2006	0,00%	42,94%	-	0,0067	0,00%
2007	0,00%	15,15%	-	- 0,0083	0,00%
<b>Média</b>	46,91%	56,88%	0,0245	0,0136	14,88%

Período de investimento de cinco anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	115,48%	96,64%	0,0207	0,0045	24,14%
2001	171,34%	124,01%	0,0655	0,0199	66,13%
2002	170,87%	168,79%	0,0546	0,0480	62,93%
2003	99,69%	61,43%	0,0225	- 0,0023	35,61%
2004	0,00%	97,25%	-	0,0145	0,00%
2005	0,00%	62,55%	-	0,0047	0,00%
<b>Média</b>	92,90%	101,78%	0,0272	0,0149	31,47%

QUADROS A6.10 – RENTABILIDADES DAS CARTEIRAS CONSTRUÍDAS VIA ENTROPIA DE SHANNON

Período de investimento de um ano

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	9,32%	-8,56%	- 0,0148	- 0,0498	8,92%
2001	11,12%	-16,19%	- 0,0392	- 0,0733	7,63%
2002	35,77%	67,51%	0,0444	0,1234	-8,08%
2003	39,49%	18,38%	0,0879	0,0060	22,93%
2004	29,98%	35,50%	0,0643	0,0498	4,21%
2005	45,65%	18,81%	0,1436	0,0169	31,57%
2006	34,86%	28,60%	0,1316	0,0400	28,19%
2007	-31,08%	-39,86%	- 0,0966	- 0,0627	-22,91%
2008	51,58%	55,50%	0,1825	0,1182	19,03%
2009	0,00%	0,81%	-	- 0,0281	0,00%
<b>Média</b>	22,67%	16,05%	0,0504	0,0140	9,15%

Período de investimento de dois anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	-0,58%	-24,75%	- 0,0457	- 0,0617	-1,92%
2001	78,11%	51,32%	0,0735	0,0149	33,69%
2002	92,15%	85,89%	0,0697	0,0669	30,77%
2003	83,00%	53,88%	0,0925	0,0276	41,08%
2004	61,69%	54,31%	0,0740	0,0330	21,17%
2005	63,94%	47,41%	0,0813	0,0292	31,39%
2006	0,53%	-11,26%	0,0011	- 0,0254	2,29%
2007	-11,04%	14,34%	- 0,0443	- 0,0049	-29,76%
2008	64,77%	55,01%	0,1239	0,0599	31,56%
<b>Média</b>	48,06%	36,24%	0,0473	0,0155	17,81%

Período de investimento de três anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	43,77%	42,76%	- 0,0086	- 0,0076	50,39%
2001	112,20%	69,70%	0,0711	0,0123	8,34%

2002	94,43%	121,39%	0,0403	0,0615	54,91%
2003	111,87%	72,69%	0,0825	0,0240	21,32%
2004	80,51%	82,91%	0,0586	0,0355	2,85%
2005	28,05%	7,54%	- 0,0086	- 0,0154	36,24%
2006	41,90%	42,94%	0,0656	0,0067	-11,67%
2007	12,53%	15,15%	- 0,0169	- 0,0083	19,85%
<b>Média</b>	65,66%	56,88%	0,0355	0,0136	50,39%

Período de investimento de cinco anos

Ano	Retorno da carteira	Retorno Ibovespa	Índice Sharpe carteira	Índice Sharpe Ibovespa	Alfa de Jensen da carteira
2000	111,09%	96,64%	0,0132	0,0045	18,16%
2001	170,45%	124,01%	0,0652	0,0199	65,36%
2002	170,87%	168,79%	0,0546	0,0480	62,93%
2003	107,02%	61,43%	0,0242	- 0,0023	43,17%
2004	92,36%	97,25%	0,0265	0,0145	18,37%
2005	92,97%	62,55%	0,0374	0,0047	40,54%
<b>Média</b>	124,12%	101,78%	0,0369	0,0149	41,42%

## APÊNDICE 7 – ATIVOS SELECIONADOS EM CADA ESTRATÉGIA

QUADRO A7 – NÚMERO DE VEZES QUE CADA ATIVO FOI SELECIONADO EM CADA ESTRATÉGIA

	Filtros de Graham originais	Filtros de Graham modificados	Análise Fatorial	Análise Discriminante	Regressão Logística	Árvore via Rényi	Árvore via Shannon	Total
PETR4			1	7	6	3	5	22
VALE5			1	6	7	2	2	18
TLPP4				6	7	2	3	18
TKNO4	5	1	2					17
AMBV4			1	4	4	2	3	14
ITSA3				2	5	2	5	14
CGRA4	2	4	3	1	2		1	13
ELET3			1	2	3	3	4	13
PLTO6	1	3	4		1		2	11
ECPR4	4	5						9
ROMI3	1	6	1				1	9
USIM5			4	1	1	1	2	9
EMBR3				1	3	1	4	9
BRKM5			2	1		3	3	9
SCAR3	4	2	1				1	8
ARCZ6				2	2	2	2	8
LIGT3				1	2	2	3	8
B RTP3					1	2	5	8
ETER3		3	3	1				7
FJTA4	2	5						7
SGAS4	1	4	2					7
MTSA4	1	4	1				1	7
SGEN4	1	2	3				1	7
ALPA4		3	2				2	7
CSNA3				2	3		2	7
EKTR4			1	2	2	1	1	7
GETI4				3	2	1	1	7
TMAR5				1	3	1	2	7
GOAU4			1	1	1	1	3	7
SBSP3			1	1	1	2	2	7
BRTO4					2	2	3	7
DURA4			1			3	3	7

EEEL3			1			2	4	7
TCSL4					1	2	4	7
ACES4						3	4	7
SOND6	1	3	2					6
TOYB3			2	2	2			6
SPRI3	3	2					1	6
CNFB4		1	2	1		1	1	6
ICPI3		1	3			1	1	6
CEPE5				2	1	1	2	6
SUZB5			1	1	1	2	1	6
CPSL3				1	1	2	2	6
ILMD4				1	1	1	3	6
VIVO4					1	2	3	6
FFTL4						2	4	6
TMCP4						2	4	6
TMGC7						2	4	6
DOHL4	3	1	1					5
EZTC3	2	2	1					5
LUXM4			2	3				5
PATI4		3	2					5
MNDL4			1	1	2		1	5
STRP4			1	1	2		1	5
TPEC6B		2	1	1			1	5
BSUL5			1	1	1	1	1	5
GGBR4			1	1	1		2	5
LAME4				1	2	1	1	5
LEVE4		2	1				2	5
BRAP4				1	1	1	2	5
COCE5				2		1	2	5
EBTP4				1	1	2	1	5
WHRL4				1	1	1	2	5
CEGR3				1		1	3	5
CPLE6				1		2	2	5
ALLL3			1	2	1			4
APTI4		1	1	1	1			4
CTAX4		4						4
MRSI4		1	3					4
PEAB4	1	2	1					4
TNLP4				1	3			4
ALBA3	1	2					1	4

BOBR4		1	1	1			1	4
DXTG4			1	1	1		1	4
SAPR4				3			1	4
CELP5				1	1		2	4
CHAP3				1	1	1	1	4
DPPI4				1	1		2	4
FBMC4				1	1		2	4
ELEK4		1					3	4
PQUN4				1		1	2	4
CGAS5						2	2	4
CSPC4						2	2	4
EBCO4						1	3	4
POMO4						1	3	4
BMKS3			1	1	1			3
CRDE3	1	2						3
CTSA3	2	1						3
GPIV11			1	1	1			3
GRNL4	1	2						3
HOOT4			2	1				3
KROT11	1	2						3
LPSB3	2		1					3
MWET4			1	1	1			3
PFRM3	1	2						3
UNIP6	1		1	1				3
VPSC4			1	1	1			3
WISA4			1	1	1			3
CRUZ3				1	1		1	3
EMAE4			2			1		3
NETC4				1	1		1	3
PTBL3			1	1			1	3
SJOS4			2				1	3
TEKA4			1		1		1	3
CMIG4					1	1	1	3
ELPL4					1	1	1	3
ENMA3B				1		1	1	3
GEPA4				1		1	1	3
GUAR3		1					2	3
IMBI4				1			2	3
ITEC3		1					2	3
KLBN4			1			1	1	3



MLFT4			1				2	3
PCAR5					1		2	3
PTPA4		1					2	3
SHUL4			1				2	3
TNEP3		1				1	1	3
CLSC6						1	2	3
CSRN6						1	2	3
CTNM4						1	2	3
SMT03						2	1	3
TBLE3						1	2	3
TSEP3						1	2	3
PEFX3							3	3
SDIA4							3	3
AFLU3		1			1			2
AGRO3	1		1					2
BAUH4			2					2
CBMA4				1	1			2
CCRO3				1	1			2
CCTU4				1	1			2
CEBR6				1	1			2
CREM3		2						2
EALT4				1	1			2
EVEN3		1	1					2
GRND3		1	1					2
IGBR3	1		1					2
LPSB3				1	1			2
MNSA4			1		1			2
OXIT4			2					2
PMAM3		1	1					2
PMET6			2					2
PTNT4				1	1			2
RDCD3				1	1			2
RSID3		1	1					2
SULT4			1		1			2
TCNO4	1	1						2
TELB4		2						2
TNCP3				1	1			2
UOLL4		1	1					2
VAGV4				1	1			2
BIOB4			1			1		2

CIQU4		1					1	2
CMGR4			1				1	2
FRAS4			1				1	2
JFEN3			1				1	2
KEPL3			1				1	2
MGEL4			1				1	2
PLDN4			1			1		2
PTQS4			1				1	2
SLED4		1					1	2
TIBR5			1				1	2
ARCE3						1	1	2
CASN4						1	1	2
CESP6						1	1	2
CMET4						1	1	2
CYRE3						1	1	2
ENBR3						1	1	2
GOLL4						1	1	2
GPCP3						1	1	2
MMXM3						1	1	2
NATU3						1	1	2
RPSA4						1	1	2
TAMM4						1	1	2
TLCP4						1	1	2
CRBM7							2	2
ELEV3							2	2
FLCL5							2	2
HGTX3							2	2
RAPT4							2	2
FESA4	2	6	2					1
BDLL4	3	4		1	1		1	1
MAGS5	4	4					2	1
MOAR3		4	3				3	1
UGPA4			4	1	1	1	3	1
TRPL4			2	2	1	2	3	1
CEEB3				2	1	3	4	1
ARTE4			1					1
ARLA3				1				1
AVIL3		1						1
BBRK3		1						1
BEMA3		1						1

BTOW3					1			1
BUET4					1			1
CARD3				1				1
CEDO4		1						1
CREM4old					1			1
CSMG3		1						1
DASA3				1				1
DOCA3			1					1
EPTE4			1					1
ESCE3			1					1
GVTT3			1					1
HAGA4			1					1
HETA4				1				1
IGTA3		1						1
LITS3		1						1
LOGN3		1						1
LUPA3					1			1
MAKR3		1						1
MEND6			1					1
MPXE3		1						1
MRVE3		1						1
POSI3		1						1
PVLT3					1			1
PVPR4			1					1
PVPR4				1				1
RDNI3		1						1
RPAD6			1					1
RSIP4			1					1
SALM4				1				1
SIBR7			1					1
TCSA3		1						1
TEND3		1						1
TENE5			1					1
VULC3				1				1
ACGU3						1		1
BRFS3						1		1
CCIM3						1		1
GSHP3						1		1
INPR3						1		1
LIXC4						1		1

PALF3						1		1
PITI4						1		1
PLAS3						1		1
POPR4						1		1
PRVI3						1		1
TPIS3						1		1
VGOR4						1		1
ASTA4							1	1
CBEE3							1	1
CPFE3							1	1
C RTP5							1	1
DTCY3							1	1
EUCA4							1	1
IGUA3							1	1
JBDU4							1	1
LF FE4							1	1
PATI3							1	1
PNVL3							1	1
RANI3							1	1
REDE4							1	1
RIPI4							1	1
RPMG3							1	1
RSIP3							1	1
RSUL4							1	1
SNSY5							1	1
TCOC3							1	1
TDBH3							1	1
TPRC6							1	1
TUPY3							1	1
WEGE3							1	1